

Es soll gezeigt werden, wie Zahlen (auch mit Nachkommaanteil) von einem Basissystem in ein anderes umgewandelt werden können. Dabei werden Basen von 2 bis 36 verwendet. Für jede Basis g sind Ziffern von 0 bis $g-1$ erlaubt! Bei Basen größer als 10 verwendet man für Ziffern oberhalb von 9 die Buchstaben A(=10), B(=11), ..., Z(=35). Das Dualsystem ($g=2$) hat die 2 Ziffern 0 und 1, das Dezimalsystem ($g=10$) hat die Ziffern 0 bis 9 und das 36-System hat die Ziffern 0 bis Z.

Die Basis g ist eine natürliche Zahl ≥ 2 . Jede Zahl z in dieser Basis g mit $(n+1)$ Vorkommastellen und m Nachkommastellen lässt sich eindeutig folgendermaßen darstellen (g -adische Entwicklung von z):

$$z = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_1 g^1 + a_0 + a_{-1} g^{-1} + a_{-2} g^{-2} + \dots + a_{-m} g^{-m} ; a_n \neq 0$$

Dafür schreibt man auch: $z = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m}$

Beispiele: 4723,58₁₀ D7C3,A6₁₆ 110100,001₂ 0,05₈ K4ZY,0T₃₆

Die tiefgestellte Zahl gibt die Basis der Zahl an.

I. Umwandlung von einem beliebigen g -System in das 10-System:

Gegeben ist eine Zahl z im g -System. Gesucht ist das Äquivalent im 10-System.

Die Darstellung im 10-System entspricht der obigen, aber die Anzahl der Vorkommastellen und die Anzahl der Nachkommastellen verändern sich gegebenenfalls.

Beispiel für eine Zahl im Zweiersystem ($g = 2$), die in das 10-System umgewandelt wird:

$$z = 1001,01_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 8 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0,25 = 9,25_{10}$$

Die gesuchte Darstellung der Zahl z im 10-System kann mithilfe des sog. *HORNER-Schemas* (geschicktes Ausklammern!) berechnet werden. Die Verwendung des Schemas erkennt man in den Schleifen des unten notierten Algorithmus.

- (1) Der Vorkommateil von z sei zV_k : (Hinweis: zV_k ist eine natürliche Zahl)

$$zV_k = ((a_n \cdot g + a_{n-1}) \cdot g + a_{n-2}) \cdot g + \dots + a_1) \cdot g + a_0$$

- (2) Der Nachkommateil von z sei zN_k : (Hinweis: zN_k ist eine reelle Zahl der Form $0, \dots$)

$$zN_k = (a_{-1} \cdot g^{m-1} + a_{-2} \cdot g^{m-2} + \dots + a_{-m}) / g^m \text{ und somit}$$

$$zN_k = (\dots (a_{-1} \cdot g + a_{-2}) \cdot g + \dots + a_{-m+1}) \cdot g + a_{-m} / g^m$$

Daraus ergibt sich der Algorithmus für die Umwandlung $g \rightarrow 10$:

<p><u>Eingaben</u> Lies g // Zahl im Bereich 2,3, ..., 15,16, ... 35,36 Für i von n ab bis 0 wiederhole Lies $a[i]$ // Ziffern/Buchst. im Bereich 0,1,2, ..., $g-1$ Für i von 1 bis m wiederhole Lies $b[i]$ // Ziffern/Buchst. im Bereich 0,1,2, ..., $g-1$ // anschließend A,B,...,F in 10,11,...,15 umwandeln!</p> <p><u>Berechnung von zV_k (Vorkommateil)</u> $zV_k = a[n]$ Für i von $n-1$ ab bis 0 wiederhole $zV_k = g \cdot zV_k + a[i]$</p> <p><u>Berechnung von zN_k (Nachkommateil = 0,*****)</u> $zN_k = b[1]$ // nat.Zahl; entspricht a_{-1} Für i von 2 bis m wiederhole $zN_k = zN_k \cdot g + b[i]$ // $zN_k = \text{nat.Zahl}$; evtl. Überlauf! $zN_k = zN_k / g^m$ // evtl. <u>Periode</u>, dann zN_k ungenau</p> <p><u>Ausgabe</u> Schreib $zV_k + zN_k$ // gewünschte Dezimalzahl</p>	<p><u>Beispielrechnung:</u></p> <p>8A,F5₁₆ also $a_1=8$ $a_0=10$ $b_1=15$ $b_2=5$</p> <p>$zV_k = 8$ $zV_k = 16 \cdot 8 + 10 = 138$</p> <p>$zN_k = 15$ $zN_k = (15 \cdot 16 + 5) = 245$ $zN_k = 245 / 16^2 = 0,95703125$</p> <p>Ergebnis also: 8A,F5₁₆ = 138,95703125₁₀</p> <p><u>Weitere Beispiele:</u></p> <p>HalloKarlo₃₆ = 1756423207595580₁₀ 1B,CD6F₁₆ = 27,8024749755859375₁₀ AFFE₁₆ = 45054₁₀</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

II. Umwandlung vom 10-System in ein beliebiges g-System:

z sei im 10-System gegeben (vgl. Formel oben) und soll in das g-System umgewandelt werden:

$$z = a_x 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \dots + a_{-j} 10^{-j} ; a_x \neq 0$$

Gesucht ist somit die g-System-Darstellung

$$z = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \dots + c_1 g^1 + c_0 + c_{-1} g^{-1} + c_{-2} g^{-2} + \dots + c_{-m} g^{-m} ; c_n \neq 0$$

Der Vorkommateil zVk kann dann eindeutig nach Potenzen von g entwickelt werden, wobei die entstehenden Koeffizienten im Bereich $\{0, 1, 2, \dots, g-1\}$ liegen. Dies geschieht durch fortwährende Abspaltung von Divisionsresten. Man dividiert also durch g und bildet den Rest der Division usw. .

Es gilt:
$$zVk = c_n g^n + c_{n-1} g^{n-1} + \dots + c_1 g^1 + c_0$$

Für die erste Division erhält man $\text{int}(zVk/g) = \text{int}(c_n g^{n-1} + c_{n-1} g^{n-2} + \dots + c_1 + c_0 / g)$

Da aber wegen $c_0 < g$ gilt: $\text{int}(c_0/g) = 0$, bleibt: $\text{int}(zVk/g) = \text{int}(c_n g^{n-1} + c_{n-1} g^{n-2} + \dots + c_1)$.

Daraus folgt: $g \cdot \text{int}(zVk/g) = c_n g^{n-1} + c_{n-1} g^{n-2} + \dots + c_1$

Der Rest ist $r = zVk - g \cdot \text{int}(zVk/g) = c_0$. Somit hat man bereits c_0 abgespalten!

Dieses Abspaltungsverfahren führt man dann für $\text{int}(zVk/g)$ statt zVk fort, usw. .

Beispielrechnung für eine Zahl im Zweiersystem (g = 2):

Sei zVk = 37. Es wird nun fortwährend durch 2 dividiert und der Rest notiert:

$$37 / 2 = 18 \text{ Rest } \underline{1}.$$

$$18 / 2 = 9 \text{ Rest } \underline{0}.$$

$$9 / 2 = 4 \text{ Rest } \underline{1}.$$

$$4 / 2 = 2 \text{ Rest } \underline{0}.$$

$$2 / 2 = 1 \text{ Rest } \underline{0}.$$

$$1 / 2 = 0 \text{ Rest } \underline{1}.$$

Beim Ergebnis 0 endet der Algorithmus. Die Reste (oberster Wert ganz rechts notiert) sind **100101**.

Dies ist die Dualzahldarstellung von 37, wie man leicht nachprüfen kann.

Der Nachkommateil zNk lässt sich auf ähnliche Weise bestimmen wie zVk, nur wird hier mit g fortwährend multipliziert.

Es gilt:
$$zNk = c_{-1} g^{-1} + c_{-2} g^{-2} + \dots + c_{-m} g^{-m}$$

Dann erhält man: $\text{int}(g \cdot zNk) = \text{int}(g \cdot (c_{-1} g^{-1} + c_{-2} g^{-2} + \dots + c_{-m} g^{-m})) = \text{int}(c_{-1} + c_{-2} g^{-1} + \dots + c_{-m} g^{-m+1}) = c_{-1}$

Dies gilt, weil alle anderen Teilterme der Klammer im Intervall $[0;1[$ liegen und ihr int-Anteil damit 0 ist!

Wir haben also bereits c_{-1} , den ersten Koeffizienten nach dem Komma, abgespalten!

Der Rest ist $r = g \cdot zNk - \text{int}(g \cdot zNk) = c_{-2} g^{-1} + c_{-3} g^{-2} + \dots + c_{-m} g^{-m+1}$.

Dieser Rest wird im nächsten Schritt wieder für zNk eingesetzt, und das Verfahren wiederholt.

Der Algorithmus endet, falls zNk = 0 wird. Dies ist aber in den meisten Fällen nicht so, weil häufig eine periodische Darstellung für den Nachkommaanteil im g-System entsteht.

Man muss dann eine Schranke für die Anzahl der Stellen angeben.

Beispielrechnung 1 für eine Zahl im Zweiersystem (g = 2):

Sei zNk = 0,25 im 10-System gegeben.

Dann ist $\text{int}(2 \cdot 0,25) = \text{int}(0,5) = \underline{0}$. Dies ist bereits die erste Stelle nach dem Komma.

Der Rest ist $r = 0,5 - 0 = 0,5$. Dies ist das neue zNk.

Wir bilden wieder $\text{int}(2 \cdot 0,5) = \text{int}(1) = \underline{1}$. Die zweite Stelle nach dem Komma.

Der Rest ist $r = 1 - 1 = 0$. Dies ist das neue zNk.

Wegen zNk = 0 bricht hier der Algorithmus ab.

Ergebnis: $0,25_{10} = 0,01_2$.

Beispielrechnung 2 für ein ganzzahliges zNk , umzuwandeln in das 16-System ($g = 16$):

Sei $z = 0,82$ im 10-System gegeben, also $zNk=82$ $g=16$ $mult = 10^2 = 100$

$$zNk \cdot g \text{ div mult} = 82 \cdot 16 \text{ div } 100 = 1312 \text{ div } 100 = \underline{\mathbf{13}} = \mathbf{D}$$

$$zNk = 1312 \text{ mod } 100 = 12$$

$$zNk \cdot g \text{ div mult} = 12 \cdot 16 \text{ div } 100 = 192 \text{ div } 100 = \underline{\mathbf{1}}$$

$$zNk = 192 \text{ mod } 100 = 92$$

$$zNk \cdot g \text{ div mult} = 92 \cdot 16 \text{ div } 100 = 1472 \text{ div } 100 = \underline{\mathbf{14}} = \mathbf{E}$$

$$zNk = 1472 \text{ mod } 100 = 72$$

$$zNk \cdot g \text{ div mult} = 72 \cdot 16 \text{ div } 100 = 1152 \text{ div } 100 = \underline{\mathbf{11}} = \mathbf{B}$$

$$zNk = 1152 \text{ mod } 100 = 52$$

$$zNk \cdot g \text{ div mult} = 52 \cdot 16 \text{ div } 100 = 832 \text{ div } 100 = \underline{\mathbf{8}}$$

$$zNk = 832 \text{ mod } 100 = 32$$

$$zNk \cdot g \text{ div mult} = 32 \cdot 16 \text{ div } 100 = 512 \text{ div } 100 = \underline{\mathbf{5}}$$

$$zNk = 512 \text{ mod } 100 = 12 \text{ (12 war bereits oben als Rest, also Periode !)}$$

Daher sind die nächsten Ziffern: 1 E B 8 5 1 E B 8 5 1 ...

Ergebnis: $0,82_{10} = 0,\overline{D1EB85}_{16}$