Umwandlung eines Dezimalbruches in einen Bruch   Ac 2013

Jede „g-adische Entwicklung“ (für g=10: Dezimalbruchentwicklung) stellt eine rationale Zahl p dar und kann als Bruch m/n geschrieben werden. Für den Spezialfall |m/n| ≤ 1 gilt:

$$p = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \cdots b_j}$$

Daraus ergibt sich als Summenformel für den Bruch m/n = p:

$$\frac{m}{n} = \frac{(g^j - 1)\cdot \sum_{i=1}^{k} a_i g^{k-i} + \sum_{i=1}^{j} b_i g^{j-i}}{(g^j - 1)\cdot g^k}$$

<u>Hierbei bedeuten bzw. gelten:</u>
g = Basis der g-adischen Entwicklung
$0 \leq a_i < g$ für i von 1 bis k
$0 \leq b_i < g$ für i von 1 bis j

<u>Beispiel</u> für Basis g = 10 (k=2 und j=2): $p = 0,67\overline{21} = \frac{m}{n}$

Dann gilt nach obiger Summenformel

$$\frac{m}{n} = \frac{(10^2 - 1)\cdot(6\cdot 10^{2-1} + 7\cdot 10^{2-2}) + 2\cdot 10^{2-1} + 1\cdot 10^{2-2}}{(10^2 - 1)\cdot 10^2} = \frac{99\cdot 67 + 21}{9900} = \frac{6654}{9900} = \frac{1109}{1650}$$

Hieraus leitet sich für das Zehnersystem (g=10) eine einfache REGEL ab:

$$\boxed{p = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \cdots b_j} = \frac{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k b_1 b_2 b_3 \cdots b_j - a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}{(10^j - 1)\cdot 10^k} = \frac{m}{n}}$$

Der Zähler des gesuchten Bruches ergibt sich durch Subtraktion des nichtperiodischen Nachkommateils vom gesamten Nachkommateil, <u>ohne Periode notiert</u> .
In den Nenner schreibt man so viele Neunen, wie der periodische Teil Stellen hat und ergänzt die so erhaltene Zahl um so viele Nullen, wie der nichtperiodische Teil Stellen hat !!

Dies sei an weiteren Beispielen demonstriert:

1) $0,10\overline{703} = \frac{10703 - 10}{99900} = \frac{10693}{99900} = \frac{289}{2700}$

2) $0,08\overline{05013} = \frac{805013 - 8}{9999900} = \frac{805005}{9999900} = \frac{17889}{222220}$

3) $0,9553\overline{571428} = \frac{9553571428 - 9553}{9999990000} = \frac{9553561875}{9999990000} = \frac{107}{112}$

Umwandlung eines Bruches in einen Dezimalbruch Ac 2013

Jede positive rationale Zahl p = m/n kann durch Division mit Rest als endliche oder periodische g-adische Reihe (g = Basis des Bruchs) geschrieben werden.
Geht die Division nicht auf, so wiederholt sich spätestens nach (n-1) Stellen hinter dem Komma ein Divisionsrest, d.h. es beginnt eine Periode.

$$p = \frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_k \overline{b_1 b_2 b_3 \cdots b_j}$$

wobei a_0 eine natürliche Zahl ist und für die Ziffern a_i , b_i gilt:
$0 \le a_i < g$ für i von 1 bis k
$0 \le b_i < g$ für i von 1 bis j

1) <u>Bestimmung der Periodenlänge j bzw. der Vorperiodenlänge k (bei gegebenem Bruch m/n):</u>

Regeln:

a) Die Anzahl der <u>unperiodischen</u> Kommastellen (Vorperiodenlänge vLen := k) ist gleich dem Maximum der Anzahlen von 2en bzw. 5en in der Primfaktorzerlegung des Nenners .

b) Die Anzahl der <u>periodischen</u> Kommastellen (Periodenlänge pLen := j) ist die kleinste Zahl x, bei der die Division von 10^x durch den Nenner n den Rest 1 ergibt.

<u>Beispiel für g=10:</u> $p = \frac{7}{88} = 0,079\overline{54}$

Bei der Berechnung von vLen und pLen kommt es nur auf den Nenner n = 88 an .
Primfaktorzerlegung zur Ermittlung von vLen: $n = 88 = 2^3 \cdot 11$.
5en treten nicht auf , jedoch **3** 2en. Daher ist **vLen = 3** .

Zur Berechnung von pLen muss der Nenner n von den Faktoren 2 und 5 befreit werden.
Beim Beispiel n = 88 verbleibt dann n2 = 11.
Wir dividieren jetzt sukzessive 10^x durch 11:
$10^1 / 11 = 0$ Rest 10
$10^2 / 11 = 9$ Rest **<u>1</u>**
Also ist **pLen = 2** .

<u>Weiteres Beispiel:</u> $p = \frac{1}{4100} = 0,00\overline{02439}$

$n = 4100 = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 41$. Da die 2 1-mal auftritt, jedoch die 5 2-mal, gilt **vLen=2** .
Wir dividieren nun 10^x durch den von 2en und 5en bereinigten Nenner n2 = 41.
$10^1 / 41 = 0$ Rest 10
$10^2 / 41 = 2$ Rest 18
$10^3 / 41 = 24$ Rest 16
$10^4 / 41 = 243$ Rest 37
$10^5 / 41 = 2439$ Rest **<u>1</u>**
Also ist **pLen = 5** .

Es genügt übrigens, als Exponent der Zehnerpotenz lediglich die Teilermenge von n2-1 zu verwenden. Für n2=41 ist dann die Teilermenge von $40 = 2^3 \cdot 5$ zu betrachten.
T40 = { 1;2;4;5;8;10;20;40 }
Daher hätte $10^3 / 41$ nicht betrachtet werden müssen.

Man kann sich vorstellen, dass bei sehr langen Perioden (maximal kann die Periodenlänge n2-1 betragen !) große Probleme bei der Division von 10^x / n2 auftreten.

Daher ist ein besseres Verfahren zur Bestimmung von pLen erforderlich:
Man erhält das selbe Ergebnis, wenn man nach der ersten Division 10/n2 nur den 10-fachen Rest des Ergebnisses durch n2 dividiert. Dies setzt man dann entsprechend weiter fort, bis der Rest 1 ist. pLen ist dann gleich der Anzahl der durchgeführten Divisionen.

Für das obige Beispiel sieht das so aus:
$10^1 / 41 = 0$ Rest 10
$10 \cdot 10 / 41 = 2$ Rest 18
$10 \cdot 18 / 41 = 4$ Rest 16
$10 \cdot 16 / 41 = 3$ Rest 37
$10 \cdot 37 / 41 = 9$ Rest **1**
Da 5 Divisionen durchgeführt wurden, gilt **pLen = 5** .

2) Bestimmung der Koeffizienten (Ziffern) a_i bzw. b_i :

Die a_i bzw. b_i werden durch Division von m durch n (Zähler durch Nenner) bestimmt.
Dazu eignet sich der folgende Algorithmus (für g = 10):
Achtung: Vorher (!) k und j bestimmen !!

```
Lies(zaehler,nenner)
q = 0
nk = zaehler mod nenner   // nk = Nachkommateil
für i von 1 bis j+k wiederhole
    nk = 10*(nk - q*nenner)
    q = nk div nenner
    falls j>0 und i=k+1 Schreib("p")   // Periodenbeginn mit "p" anzeigen
    Schreib(q)
ende wiederhole
```

Beispiel:

$$\frac{m}{n} = \frac{47}{71} = 0,\overline{66197183098591549295774647887323943}$$

Es ist hier $k = 0$ und $j = 35$ (Periode 35-stellig !)

Hinweis: Der Algorithmus funktioniert auch bei abbrechenden Dezimalbrüchen (dort ist j=0) !

z.B. m/n = 7/8 (hier gilt k=3 und j=0)
nk = zaehler mod nenner = 7
i=1: nk = 70 q = 8 Schreib("8")
i=2: nk = 60 q = 7 Schreib("7")
i=3: nk = 40 q = 5 Schreib("5")
Ergebnis: 7/8 = 0,875