

In der Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist die Gleichung  $x^2 = -1$  nicht lösbar .

Abhilfe schafft eine Zahlbereichserweiterung von der Menge  $\mathbb{R}$  auf die Menge  $\mathbb{C}$  der sogenannten komplexen Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen besteht aus allen Zahlen der Form

$$z = a + i \cdot b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{und } i^2 = -1$$

a heißt „Realteil“ von z und b „Imaginärteil“ von z ,  $\text{Re}(z)$  bzw.  $\text{Im}(z)$  . i heißt „Imaginäre Einheit“ .

Die Zahl  $\bar{z} = a - ib$  heißt „konjugiert komplex“ zu  $z = a + ib$  .

In dieser neuen Menge hat die Gleichung  $z^2 = -1$  die beiden komplexen Lösungen  $z = i$  und  $z = -i$  .

Für Addition und Multiplikation gelten die Gesetze: Kommutativges., Distributivges., Assoziativges. .

Jede komplexe Zahl lässt sich grafisch als Punkt (a;b) in der „Gaußschen Zahlenebene“ veranschaulichen.

Beispiel:  $z = 4 + 3i = (4 ; 3)$

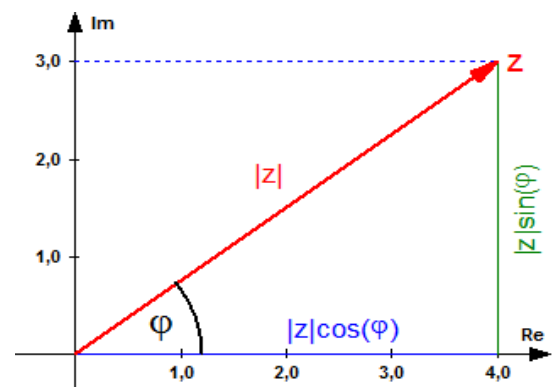
$|z|$  heißt „Betrag“ von z und gibt die Entfernung vom Ursprung (0;0) zu z an.

Es gilt:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  hier:  $|z|=5$

$\varphi$  heißt „Argument“ bzw. „Phase“ von z .

Es gilt:  $\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctan \frac{b}{a}$  s. (\*)

hier:  $\tan(\varphi) = 0,75$  ;  $\varphi \approx 36,87^\circ$  .



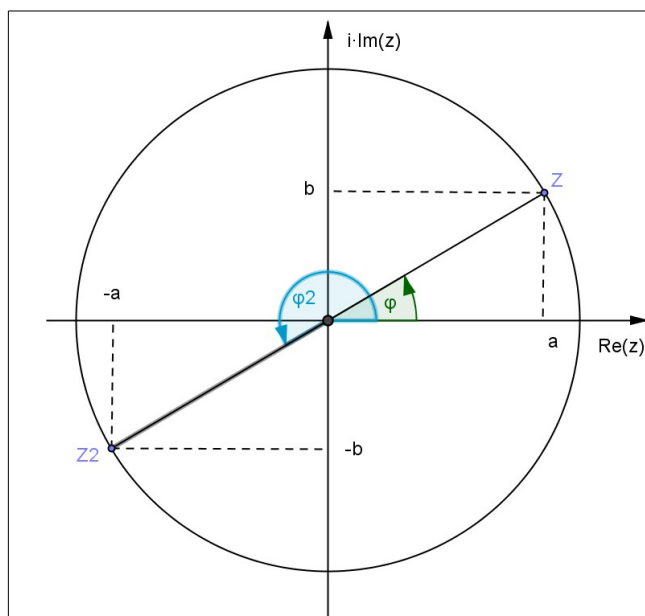
Außerdem gelten noch:  $a = |z| \cdot \cos(\varphi)$  sowie  $b = |z| \cdot \sin(\varphi)$

$z = |z| \cdot \cos(\varphi) + i \cdot |z| \cdot \sin(\varphi)$  , also  $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$  Polarform von z

Eine weitere Darstellung ist die Eulersche Formel:  $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]$

Diese Formel setzt i, e und  $\pi$  (z.B.  $e^{i \cdot 2\pi} = 1$ ) zueinander in Beziehung !

(\*) Präzisierung: Berechnung des Winkels  $\varphi$  mittels  $\arctan(b/a)$  (s.oben):



Aus der Beziehung  $\tan(\varphi) = b / a$  folgt zwar  $\varphi = \arctan ( b / a )$ , jedoch lassen sich auf diese Weise nicht alle möglichen Winkel  $\varphi$  zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$  ( Bogenmaß:  $0$  und  $2 \pi$  ) berechnen.

Die Grafik zeigt, dass die Winkel mit gleichem Tangenswert sich um je  $180^\circ$  ( $\pi$ ) unterscheiden, je nachdem, ob  $a > 0$  oder  $a < 0$  gilt !

Hier ist  $\varphi_2 = \varphi + \pi$  wegen  $a < 0$  und  $b < 0$  .

Für  $a > 0$  und  $b < 0$  gilt:  $\varphi_2 = 2\pi - \varphi$

Für  $a < 0$  und  $b > 0$  gilt:  $\varphi_2 = \pi - \varphi$

Außerdem sind noch die Sonderfälle für  $a = 0$  bzw.  $b = 0$  zu unterscheiden. Z.B. gilt bei  $a = 0$  entweder  $\varphi = 90^\circ$  ( $\pi/2$ ) oder  $\varphi = 270^\circ$  ( $3\pi/2$ ) .

Es ergeben sich folgende Fälle zur Berechnung des Argumentes  $\varphi$  im Bereich  $[ 0 ; 2\pi ]$  :

$\varphi =$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{nicht definiert, falls } a = 0 \wedge b = 0 \\ 0, \text{ falls } b = 0 \wedge a > 0 \\ \pi, \text{ falls } b = 0 \wedge a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{ falls } a = 0 \wedge b > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ falls } a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan \frac{b}{a}, \text{ falls } a > 0 \wedge b > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, \text{ falls } a < 0 \wedge b < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{b}{a}, \text{ falls } a > 0 \wedge b < 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, \text{ falls } a < 0 \wedge b > 0 \end{array} \right.$	vereinfacht $\Rightarrow$	$\varphi =$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{nicht definiert, falls } a = 0 \wedge b = 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{ falls } a = 0 \wedge b > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ falls } a = 0 \wedge b < 0 \\ \arctan \frac{b}{a}, \text{ falls } a > 0 \wedge b > 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{b}{a}, \text{ falls } a > 0 \wedge b < 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, \text{ falls } a < 0 \end{array} \right.$
-------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------	-------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Beispiele:

- 1)  $z = 0$  ergibt  $\varphi$  ist "nicht definiert"
- 2)  $z = i$  ergibt  $\varphi = \pi/2$
- 3)  $z = -i$  ergibt  $\varphi = -\pi/2$
- 4)  $z = 1 + i$  ergibt  $\varphi = \arctan(1) = \pi/4$
- 5)  $z = 1 - i$  ergibt  $\varphi = 2\pi + \arctan(-1) = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$
- 6)  $z = -1 + i$  ergibt  $\varphi = \pi + \arctan(-1) = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$
- 7)  $z = -1 - i$  ergibt  $\varphi = \pi + \arctan(1) = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$

## Grundrechenarten und Potenzierung:

### Addition (Subtraktion entsprechend):

$$z_1 + z_2 = a_1 + i \cdot b_1 + a_2 + i \cdot b_2 = \mathbf{a_1 + a_2 + i \cdot (b_1 + b_2)}$$

Beispiel:  $z_1 = 3 + 4i \quad z_2 = -1 + i \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 = 2 + 5i$

### Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) \\ &= a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 + i \cdot a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot b_2 \\ &= \mathbf{a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + i \cdot (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)} \end{aligned}$$

Beispiel:  $z_1 = 4 + 3i \quad z_2 = -1 + i \quad \Rightarrow \quad z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + i \cdot (3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1) = -7 + i$

### Division:

$$\begin{aligned} z_1 / z_2 &= (a_1 + i \cdot b_1) / (a_2 + i \cdot b_2) \\ &= (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 - i \cdot b_2) / [(a_2 + i \cdot b_2) \cdot (a_2 - i \cdot b_2)] \\ &= (a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 - i \cdot a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot b_2) / (a_2^2 + b_2^2) \\ &= \mathbf{[a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + i \cdot (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2)] / (a_2^2 + b_2^2)} \end{aligned}$$

Beispiel:  $z_1 = 4 + 3i \quad z_2 = -1 + i \quad \Rightarrow \quad z_1 / z_2 = [4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + i \cdot (3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1)] / (1^2 + 1^2) = (-1 - 7i) / 2$

Spezialfall Kehrwert von z:  $1 / z = (a - i \cdot b) / (a^2 + b^2) = \bar{z} / |z|^2$

### Potenzierung:

① Unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes:

$$z^n = (a + i \cdot b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot (i \cdot b)^k ; \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad 0! = 1; \quad n \in \mathbb{N}$$

Für Potenzen von i gilt:  $i^{4n} = 1 \quad i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i ; \quad n \in \mathbb{Z}$

Beispiel:  $(4 + 3i)^3 = \sum_{k=0}^3 \frac{3!}{k!(3-k)!} \cdot 4^{3-k} \cdot (3i)^k = 4^3 \cdot (3i)^0 + 3 \cdot 4^2 \cdot (3i)^1 + 3 \cdot 4^1 \cdot (3i)^2 + 4^0 \cdot (3i)^3 =$   
 $64 + 144i - 108 - 27i = -44 + 117i$

Die Ergebnisse sind dann übrigens immer exakt, jedoch ist der Rechenaufwand meist hoch !

② Unter Verwendung des De Moivreschen Satzes (Abraham de Moivre) und der Polarform:

$$[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]^n = [\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)] ; n \in \mathbb{N}^* \quad \text{Satz von De Moivre}$$

$$z = |z| \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] \quad \text{Polarform}$$

Dann gilt die De Moivre - Formel :

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)]; \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Anmerkung: Diese Formel gilt auch für rationale Exponenten, d.h. n kann ein Bruch sein !  
Sie liefert im Allgemeinen wegen der trigonometrischen Berechnungen ungenaue Ergebnisse.

Beispiel:  $(4 + 3i)^3 = |4 + 3i|^3 \cdot [\cos(3 \cdot \arctan(0,75)) + i \cdot \sin(3 \cdot \arctan(0,75))] ]$   
 $= \sqrt{(16+9)^3} \cdot (-0,352 + 0,936i) = 125 \cdot (-0,352 + 0,936i) = -44 + 117i$

## Weitere Beispiele:

1)  $(4+3i)^2 = 16 - 9 + 24i = 7 + 24i$  (Binomische Formel).

Mit der De Moivre - Formel:  $\varphi = \arctan(3/4)$  :

$$(4+3i)^2 = |4+3i|^2 \cdot [\cos(2 \cdot \arctan(3/4)) + i \cdot \sin(2 \cdot \arctan(3/4))] = 25 \cdot (0,28 + 0,96i) \\ = 7 + 24i$$

2)  $(4+3i)^{-3} = 1 / (4+3i)^3 = 1 / [(4+3i)(7+24i)] = 1 / (28 + 21i + 96i - 72) = 1 / (-44 + 117i) \\ = (-44 - 117i) / 15625$  . (Binomische Formel)

Mit der De Moivre - Formel:

$$(4+3i)^{-3} = |4+3i|^{-3} \cdot [\cos(-3 \cdot \arctan(3/4)) + i \cdot \sin(-3 \cdot \arctan(3/4))] \\ = \sqrt{(16+9)^{-3}} \cdot (-0,352 - 0,936i) \\ = 1/125 \cdot (-0,352 - 0,936i) \\ = 125/125^2 \cdot (-0,352 - 0,936i) \\ = (-44 - 117i) / 15625$$

3)  $(4+3i)^{-1,5} = 1 / (4+3i)^{3/2} = 1 / \sqrt{(4+3i)^3} = 1 / \sqrt{-44+117i}$

Für den Nenner des Bruches muss ein exaktes Ergebnis  $a + bi$  gefunden werden !

Ansatz:  $\sqrt{-44+117i} = a + bi$  , d.h.  $-44+117i = (a + bi)^2$

$$a^2 - b^2 + 2abi = -44 + 117i$$

Durch Vergleich der Terme folgt:  $a^2 - b^2 = -44$  und  $2ab = 117$

Wir setzen  $b = 58,5 / a$  in  $a^2 - b^2 = -44$  ein und erhalten:

$$a^2 - (58,5 / a)^2 = -44, \text{ also } a^2 - 3422,5/a^2 + 44 = 0 \text{ bzw. } a^4 - 3422,5 + 44a^2 = 0$$

Diese biquadratische Gleichung hat 2 Lösungen. Die erste ist  $a = \sqrt{40,5}$ .

Eine Lösung des Gleichungssystems ist daher :  $a = \sqrt{40,5}$  und  $b = 58,5 / \sqrt{40,5}$

Der Lösungsweg ist dann wie folgt:

$$(4+3i)^{-1,5} = \frac{1}{\sqrt{40,5} + \frac{58,5}{\sqrt{40,5}}i} = \frac{\sqrt{40,5}}{40,5 + 58,5i} = \frac{\sqrt{40,5} \cdot (40,5 - 58,5i)}{(40,5 + 58,5i) \cdot (40,5 - 58,5i)} \\ = \frac{\sqrt{9^2/2}}{5062,5} \cdot (40,5 - 58,5i) = \frac{\sqrt{2}}{1125} \cdot (40,5 - 58,5i) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{250} \cdot (9 - 13i)} \\ \approx 0,0509116882 - 0,0735391052 \cdot i$$

Wie man sieht, kann man hier auf rein algebraischem Wege ein exaktes (Wurzel-)Ergebnis ermitteln !

Mit der De Moivre - Formel:

$$(4+3i)^{-1,5} = |4+3i|^{-1,5} \cdot [\cos(-1,5 \cdot \arctan(3/4)) + i \cdot \sin(-1,5 \cdot \arctan(3/4))] \\ \approx (16+9)^{-0,75} \cdot (0,5692099788 - 0,8221921916i) \\ \approx 0,0509116882 - 0,0735391052i$$

## Die n Lösungen der Gleichung $z^n = c$ :

Wie wir oben in Beispiel 3 gesehen haben, kann man aus dem komplexen Ansatz  $\sqrt[n]{c} = z = a + bi$  2 Lösungen herausfiltern, wovon oben nur eine hergeleitet wurde.

$\sqrt[n]{c} = z$  kann man umformen zu  $c = z^n$ . Gesucht sind die beiden Lösungen dieser Gleichung

Verallgemeinerung:

Gegeben:  $c = |c| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ ;  $c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}(c)}{\text{Re}(c)}$ . Gesucht:  $z = \sqrt[n]{c}$ ;  $z \in \mathbb{C}$

Lösungen von  $z^n = c$  :

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right] ; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Beispiel:  $z^5 = 4 + 3i$ .

Mit  $|c| = |4+3i| = 5$  und  $\tan(\varphi) = \frac{3}{4}$  bzw.  $\varphi = \arctan(0,75)$  folgt:

$$z_k = \sqrt[5]{5} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\arctan(0,75) + k \cdot 2\pi}{5}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arctan(0,75) + k \cdot 2\pi}{5}\right) \right] ; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Näherungslösungen:

Phi (von  $z_0$ ) = 7,374°

Radius  $|z| = 1,38$

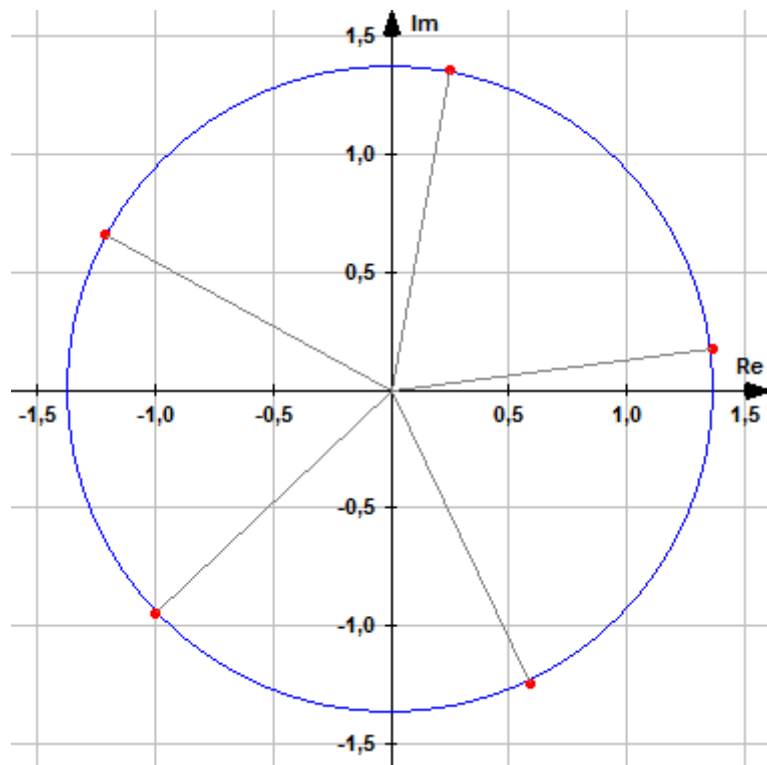
$$z_0 \approx 1,36831868 + i \cdot 0,17708171$$

$$z_1 \approx 0,25441901 + i \cdot 1,35606965$$

$$z_2 \approx -1,21107908 + i \cdot 0,66101543$$

$$z_3 \approx -1,00290705 - i \cdot 0,94753965$$

$$z_4 \approx 0,59124844 - i \cdot 1,24662714$$



Die Lösungen liegen alle (in gleichem Abstand) auf einem Kreis mit Radius  $r = \sqrt[5]{5} \approx 1,3797$

Weitere Berechnungen (jeweils für  $z = 4+3i$ ):

1)  $1/z = 1/(4+3i) = (4-3i)/(4-3i)/(4+3i) = (4-3i)/(4^2+3^2) = (4-3i)/25$ .

2)  $1/z^2 = 1/(4+3i)^2 = (4-3i)^2/(4-3i)^2/(4+3i)^2 = (4-3i)^2/(4^2+3^2)^2 = (16-9-24i)/25^2 = (7-24i)/625$ .

Dies sollte auch bei Verwendung der Moivreschen Formel herauskommen:

$$1/z^2 = 1/(25 \cdot [\cos(2\arctan(0,75)) + i \cdot \sin(2\arctan(0,75))])$$

$$= 1/(25 \cdot [0,28 + i \cdot 0,96]) = 1/(7+i \cdot 24) = (7-24i)/(7^2+24^2) = (7-24i)/625$$