Superellipsen, Superkreise und ihre Flächeninhalte Ac 2-2017

Superellipsen sind Relationen R der Form

$$\boxed{R:\ \left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1 \quad \text{mit} \quad a,b,n\in\mathbb{R}\ ; \quad \text{a,b sind die Halbachsen der Superellipse}}$$

Diese Relation lässt sich auch mithilfe zweier Funktionen f und g darstellen, wenn man die Relationsgleichung nach y auflöst :

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1 \Rightarrow \left|\frac{y}{b}\right|^n=1-\left|\frac{x}{a}\right|^n \Rightarrow |y|=b\cdot\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|^n\right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

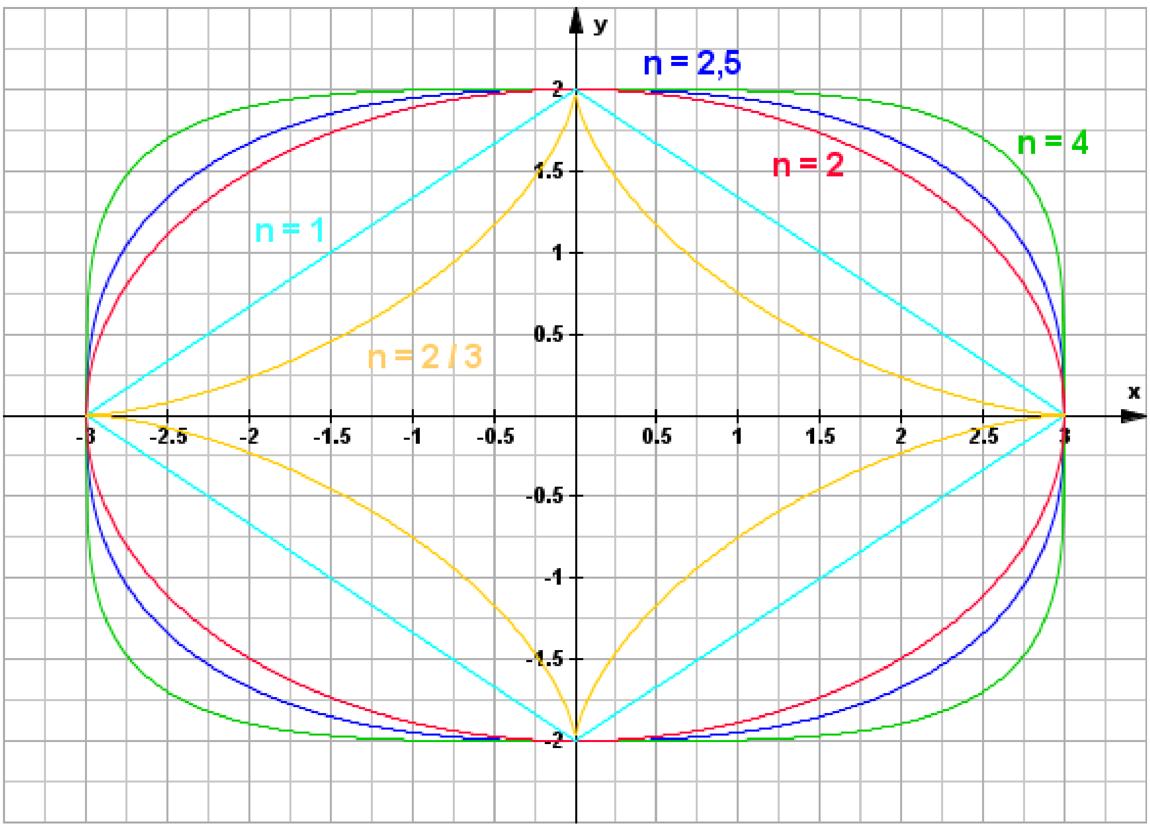
$$\boxed{f(x)=b\cdot\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad g(x)=-b\cdot\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|^n\right)^{\frac{1}{n}} \ ; \ x\in[-a;a]}$$

Auf diese Weise lassen sich Superellipsen einfacher grafisch darstellen, und auch das jeweilige Integral lässt sich leichter berechnen:

Der Begriff „Superellipse“ stammt vom dänischen Wissenschaftler Piet Hein (1905–1996) .
Der französische Physiker und Mathematiker Gabriel Lamé (1795–1870) stellte die Formel für die Superellipse auf (Verallgemeinerung der Ellipsengleichung).

Für n = 2 ergibt sich eine normale Ellipse.
Für n > 2 erhalten wir die eigentliche Superellipse, die sich bei steigendem n-Wert einem Rechteck annähert (s. Grafik) .
Für n < 2 ergeben sich Subellipsen :
- n = 1 : Ein Rhombus (für den Spezialfall a = b ein Quadrat) mit der Fläche a · b / 2.
- n = 2 / 3 (und a = b) : Eine Astroide .

Für a = b liegt ein sogenannter „Superkreis“ (s. unten) vor.



Anwendungsgebiete für Superellipsen:

- Flugzeugkonstruktion
- Schrifttypen (Computerpionier Donald Knuth)
- Architektur, Stadtplanung, Möbeldesign
- Super-Ei (von Piet Hein); ein Ellipsoid gemäß

$$\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\right|^{2,5}+\left|\frac{z}{4}\right|^{2,5}=1$$

Der Spezialfall „Superkreis“:

Als **Superkreise** bezeichnet man Relationen der Form

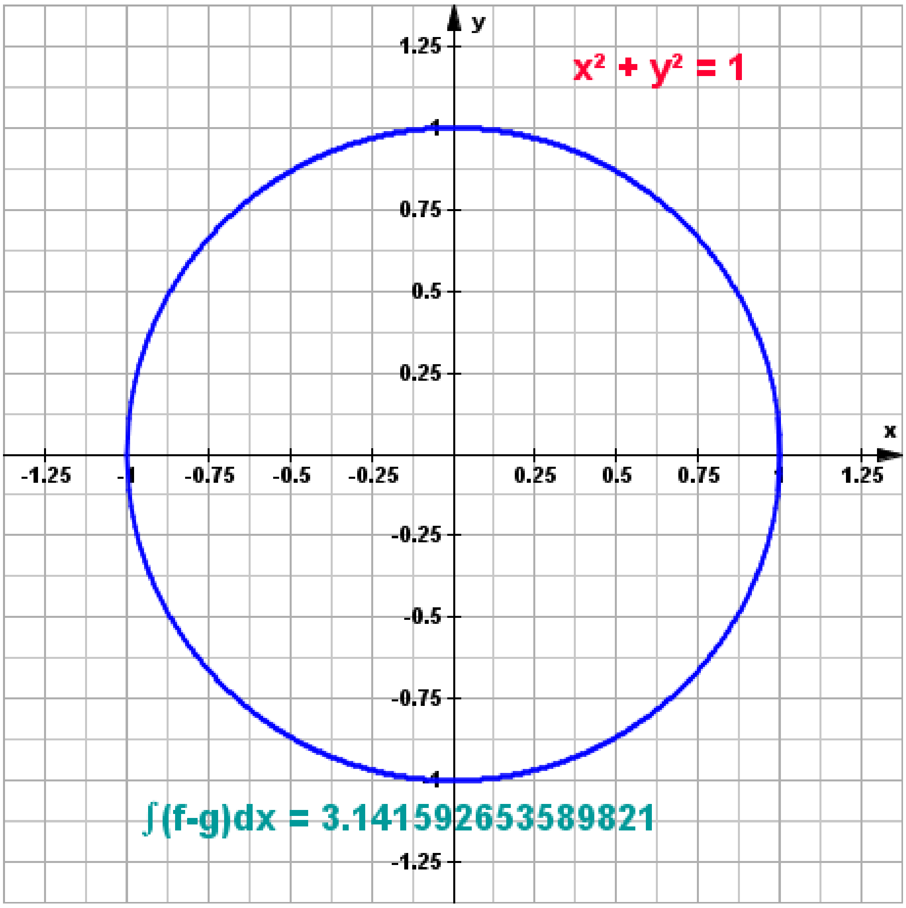
$$\boxed{R:\quad x^n+y^n=r^n \quad ; n\in\mathbb{N}-\{0;1\}}$$

Für n = 2 erhält man den normalen Kreis mit Radius r .

1. Beispiel (Integral): Kreis R: $x^2 + y^2 = 1$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ (unterhalb der x-Achse).



Es gilt:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - [-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}] = 2\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 4\cdot\int_{0}^{1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$2\cdot(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x))\Big|_0^1 = 2\cdot\arcsin(1) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

π auf 30 Nachkommastellen genau: 3,141592653589793238462643383279

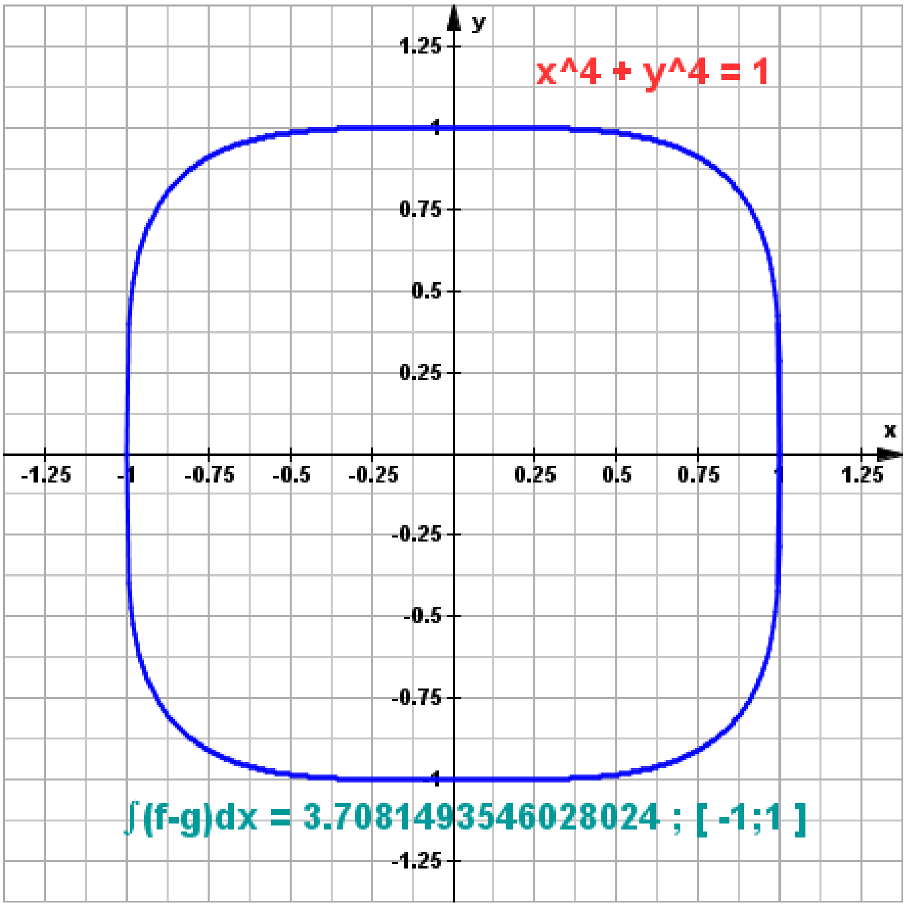
jKarloPlot(Java8):	3.141592653589821
Karloplot(Delphi7):	3.1415926535897932**4** (Datentyp extended)
GeoGebra:	π (kein Näherungswert)
Maxima:	π (kein Näherungswert)
EulerMathToolbox:	3,141592653589793
Derive 5:	3.141592653589793240031282 (25 Stellen)
TI84:	3,141593074
CASIO Classpad:	3, 141592654

2. Beispiel(Integral): Superkreis mit n = 4 (Bezeichnung: „Squircle“) und r = 1

$$R:\ x^4 + y^4 = 1$$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = (1-x^4)^{\frac{1}{4}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -(1-x^4)^{\frac{1}{4}}$ (unterhalb der x-Achse).



Der auf 18 Stellen exakte Integralwert ist

$$\int_{-1}^{1} (1-x^4)^{\frac{1}{4}} - [-(1-x^4)^{\frac{1}{4}}] = 2 \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^4)^{\frac{1}{4}} = 3{,}70814935460274383$$

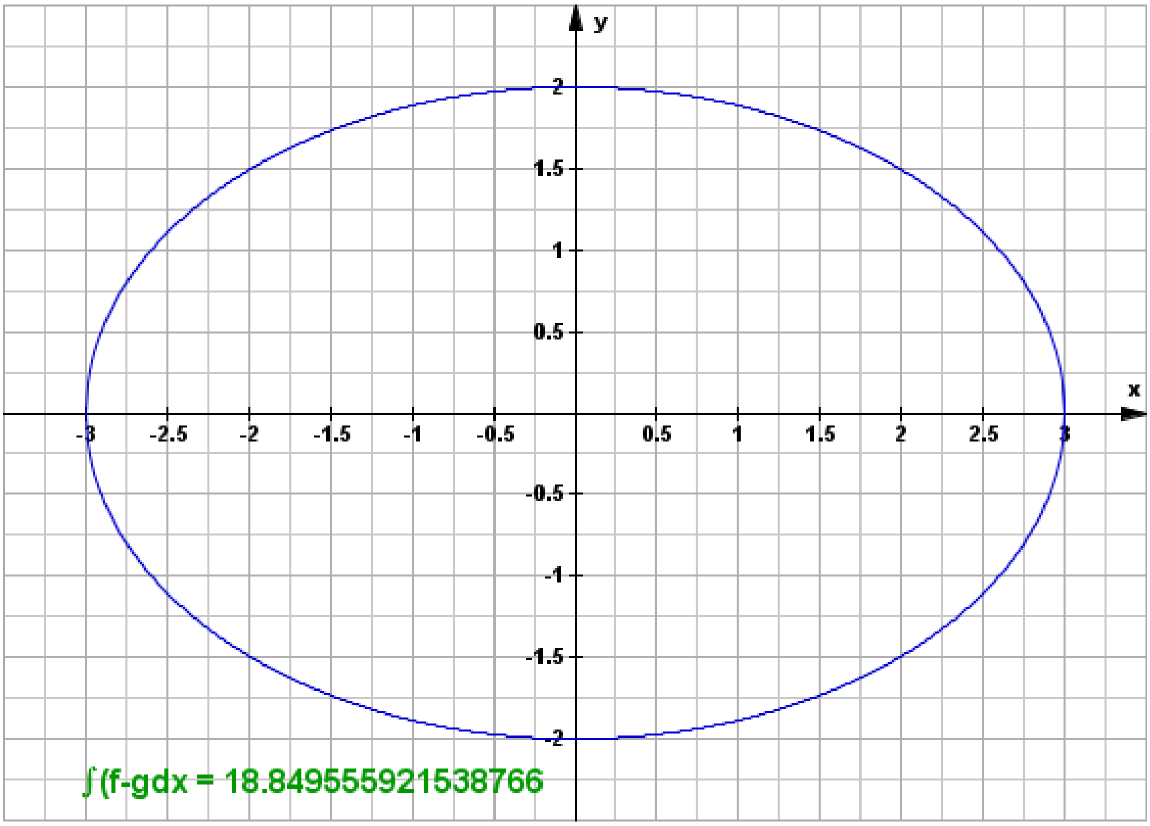
jKarloPlot(Java8): 3.7081493546028024
KarloPlot(Delphi): 3,708149354602743 84 (Datentyp extended)
GeoGebra: 3,70814935460275
Maxima: 3,70814935460274383 68677
EulerMathToolbox: 3,708149354602739
Derive 5: 3,70814935460274383 6914935406
TI84: 3,70815 1131
CASIO Classpad: 3, 708149355

3. Beispiel(Integral): (Normale) Ellipse mit n = 2 a = 3 b = 2

$$\left|\frac{x}{3}\right|^2 + \left|\frac{y}{2}\right|^2 = 1$$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = 2 \cdot (1 - \left|\frac{x}{3}\right|^2)^{\frac{1}{2}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -2 \cdot (1 - \left|\frac{x}{3}\right|^2)^{\frac{1}{2}}$ (unterhalb der x-Achse).



Für das Integral ergibt sich :

$$\int_{-3}^{3} f(x) - g(x)dx = 4 \cdot \int_{-3}^{3} (1 - \left|\frac{x}{3}\right|^2)^{\frac{1}{2}} = 8 \cdot \int_{0}^{3} (1 - \left|\frac{x}{3}\right|^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$8/3 \cdot \int_{0}^{3} (9 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 4/3 \cdot [x \cdot \sqrt{9 - x^2} + 9 \cdot \arcsin(\frac{x}{3})]\Big|_{0}^{3} =$$

$$4/3 \cdot 9 \cdot \arcsin(1) = 12 \cdot \frac{\pi}{2} = 6\pi$$

6π auf 20 Nachkommastellen genau: 18,84955592153875943077

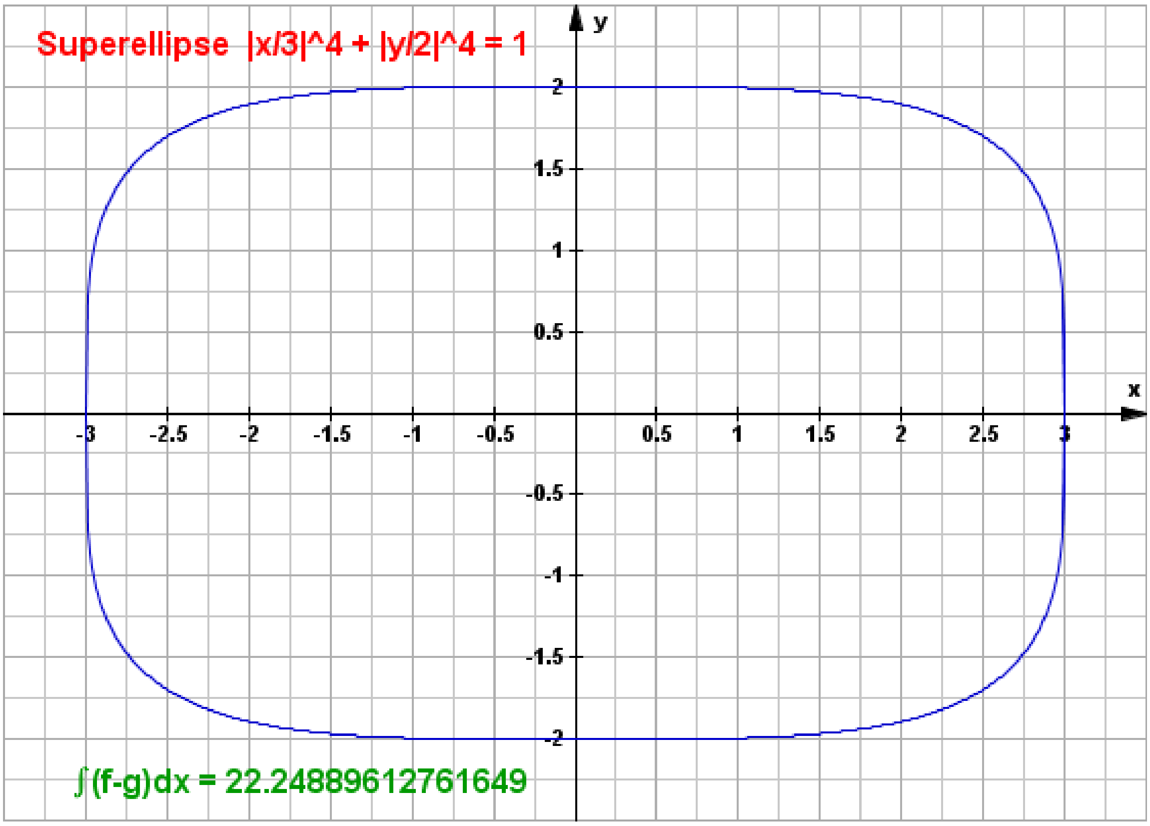
Der von Java8 berechnete Double-Wert (siehe Grafik) stimmt bis auf 13 Nachkommastellen !

4. Beispiel(Integral): SuperEllipse mit n = 4 a = 3 b = 2

$$\left|\frac{x}{3}\right|^4 + \left|\frac{y}{2}\right|^4 = 1$$

Die Relation wird zerlegt in $f(x) = 2\cdot(1-\left|\frac{x}{3}\right|^4)^{\frac{1}{4}}$ (oberhalb der x-Achse) und

$g(x) = -2\cdot(1-\left|\frac{x}{3}\right|^4)^{\frac{1}{4}}$ (unterhalb der x-Achse).



Für das Integral ergibt sich :

$$\int_{-3}^{3} f(x)-g(x)dx = 4\cdot\int_{-3}^{3}(1-\left|\frac{x}{3}\right|^4)^{\frac{1}{4}} = 8\cdot\int_{0}^{3}(1-\left|\frac{x}{3}\right|^4)^{\frac{1}{4}} = 8/3\cdot\int_{0}^{3}\sqrt[4]{81-x^4}$$

Dieses Integral lässt sich nur näherungsweise lösen:

Maxima:	22,2485198197079547810517 4 (Romberg; offensichtlich falsch !)
	22,2488961276164438629621 2 (Quadpack)
Derive5:	22.2488961276164631193525 8
	22.24889612761646302124973 18336
Karloplot(Delphi)	22,248896127616463

Der von Java8 berechnete Double-Wert (siehe Grafik) stimmt bis auf 13 Nachkommastellen !