Taylorreihen und ihre Implementierung mit JAVA:

Taylorpolynome sind ganzrationale Funktionen T(x), welche eine bestimmte andere Funktion f(x) in der Umgebung einer vorgegebenen Stelle x_0 approximieren.

$$T(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

Je höher der Grad n des Polynoms, desto besser wird die Approximation in der Umgebung von x_0.
Für $n = \infty$ spricht man von einer Taylorreihe, welche identisch ist mit der Funktion f .

Erzeugung eines Taylorpolynoms:

Das Prinzip für die Bildung des Taylorpolynoms T ist, dass jede Ableitung von T(x) an der Stelle x_0 mit der entsprechenden Ableitung von f(x) übereinstimmen muss, also für i von 0 bis n : $T^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$

Daher gilt:
$f^{(0)}(x_0) = a_0$
$f^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1}$ → **$f^{(1)}(x_0) = a_1$**
$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + 20a_5(x-x_0)^3 + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$ → **$f^{(2)}(x_0) = 2a_2$**
$f^{(3)}(x) = 6a_3 + 24a_4(x-x_0) + 60a_5(x-x_0)^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$ → **$f^{(3)}(x_0) = 6a_3$**
Allgemein gilt: **$f^{(i)}(x_0) = i! \cdot a_i$ bzw. $a_i = f^{(i)}(x_0) / i!$**

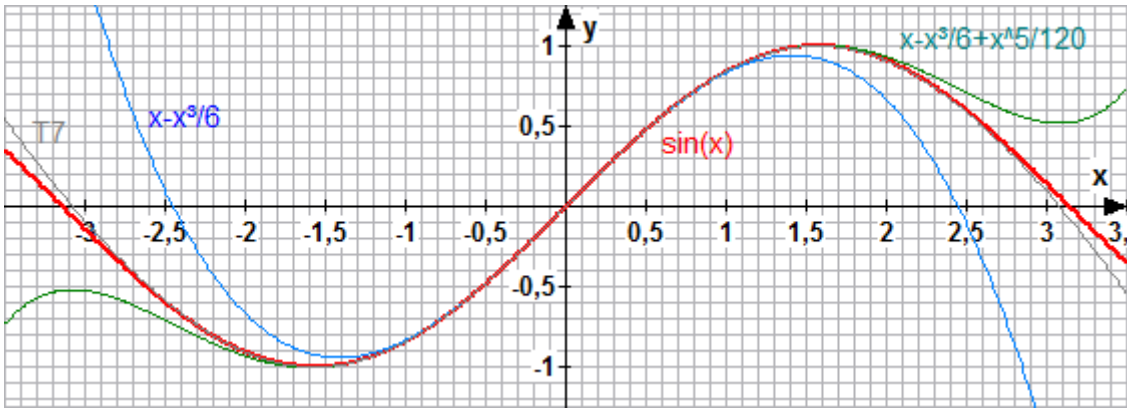
Dann ist $T(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ Taylorpolynom für f, entwickelt an der Stelle x_0

Hierfür ein Beispiel: f(x) = sin(x); $x_0 = 0$.

f ' (x) = cos(x) f " (x) = -sin(x) f ''' (x) = -cos(x) f '''' (x) = sin(x) = f(x)
Also ist f ' (0) = 1 f " (0) = 0 f ''' (0) = -1 f '''' (0) = 0 usw.
Jedes 2. Glied fällt weg und für die restlichen Glieder alternieren die Vorzeichen.

Das Taylorpolynom für sin(x) lautet dann:

$$\sin(x) \approx T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \pm \ldots$$



Anmerkung: T7 ist das Polynom bis zum Term $x^7 / 5040$.

Fazit: Je höher der Grad n gewählt wird, um so besser ist die Approximation !

Weitere Beispiele für Taylorreihen :

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots \quad ; x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots \quad ; |x| \le 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots \quad ; -1 < x \le 1$$

Achtung: Hier beginnt der Summenindex mit k=1 .

Die Reihen für arctan(x) und ln(x) **konvergieren sehr langsam**.
Schnellere Alternativen siehe unten.

Computerprogrammierung:

Zur Berechnung von Approximationswerten mit dem Computer muss ein Programm die Potenzsummen der Taylorreihe bilden können, was aber mit einer for-Schleife recht einfach erledigt werden kann.
Da mit größer werdendem Exponenten die (Potenz-) Summanden in der Regel immer kleiner werden, ist es aus numerischen Gründen ratsam, die Summanden “von hinten nach vorne” abzuarbeiten.

Beispiel zur Verdeutlichung des numerischen Problems (JAVA 7):

$$\sum_{k=0}^{17} \frac{x^k}{k!} = 1{,}0100501670841682 \quad \text{, aber}$$

$$\sum_{k=17}^{0} \frac{x^k}{k!} = 1{,}0100501670841680$$

Ergebnis auf 17 Dezimalen genau: 1.01005016708416805

JAVA-Methode:

```
public static double f(double x, int k) {
      // Beispielfunktion für Taylorreihen
      // hier:   ln(x)
      return 2.0 / (2 * k + 1) * Math.pow((x - 1) / (x + 1), 2 * k + 1);
}

public static double taylorReihe(double x, int n) {
      // berechnet sum(f(x,k),k,0,n)
      double sum = 0;
      for (int k = n; k >= 0; k--)
            sum = sum + f(x, k);
      return sum;
}
```

1) Die Taylorreihe für e^x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n \quad ; \quad x > 0$$

Für $\mathbf{x < 0}$ verwende man $\mathbf{e^{-x} = 1/e^x}$.

Anmerkung: Ersetzt man x durch $x \cdot \ln(a)$, so kann man mit der Formel auch $e^{x \cdot \ln(a)} = a^x$ berechnen.

Die e^x-Formel lässt sich geschickt umformen, so dass man ohne die Fakultäten und Potenzen auskommt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} \cdot (1 + \frac{x}{2} \cdot (1 + \frac{x}{3} \cdot (1 + \frac{x}{4} \cdot (1 + \ldots + \frac{x}{n-1} \cdot (1 + \frac{x}{n}))))) + R_n \quad ; \quad x > 0$$

Für das sog. "Restglied" R_n gilt: $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\vartheta \cdot x} \; mit \; 0 < \vartheta < 1$

Die Reihe konvergiert am besten in der Nähe von 0 !

Daher sollte man den Exponenten x ggfs. durch die folgende Umformung verkleinern : $e^x = \left(e^{\frac{x}{m}} \right)^m$.

Zum Beispiel kann man $\mathbf{m = (int)\ (5x)}$ für $x > 0{,}2$ wählen . Dann gilt: $x/m \approx 0{,}2$.

Man berechnet also erst $e^{\frac{x}{m}}$ mit der Summenformel und potenziert das Ergebnis mit m .

Laut Restglied ist der maximale Fehler dann $\frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{0{,}2} \approx \frac{1{,}2}{5^{n+1} \cdot (n+1)!}$

Will man z.B. e^x auf 15 Dezimalen berechnen, so gilt: $\frac{1{,}22}{5^{n+1} \cdot (n+1)!} < 10^{-16}$

Dies bedeutet : $5^{n+1} \cdot (n+1)! > 1{,}22 \cdot 10^{16}$

Man errechnet, dass für diese gewünschte Genauigkeit bereits $\mathbf{n = 11}$ ausreicht .

Beispiele für e^x (JAVA 7 ; n = 11):

	Zum Vergleich (16 Dezimalen sind exakt)
$e^{0,2}$ = 1.2214027581601699	1.22140275816016983
e^2 = 7.389056098930651	7.38905609893065022
e^{100} = 2.6881171418161584·10^43	2.6881171418161354·10^43
e^{500} = 1.403592217852897·10^217	1.4035922178528374·10^217
e^{709} = 8.218407461555467·10^307	8.218407461554972·10^307

Die Ungenauigkeiten kommen durch Rundungsfehler (vor allem beim Potenzieren) zustande !
e^{710} würde bereits den double-Wertebereich übersteigen !

Setzt man in der e^x-Formel x=1, so erhält man die **Eulersche Zahl e ≈ 2,7182818284590452353** .

Beispielrechnung für e mit Restgliedabschätzung:

Das Restglied lässt sich speziell für e (e^x mit x = 1) geschickt abschätzen:

Rechnet man nämlich bis zu 1/n! , so ist der Fehler kleiner als 1/(n+1)! + 1/(n+2)! + ...

Man kann zeigen, dass dann gilt: $\mathbf{R_n = 1/(n+1)! + 1/(n+2)! + ... < (n+2)/(n+1)/(n+1)!}$

Wir wollen e auf 15 Dezimalen genau berechnen, d.h. $R_n = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} < \varepsilon = 10^{-15}$.

Die Umformung liefert $\frac{n+1}{n+2} \cdot (n+1)! > 10^{15}$. Ergebnis $n \geq 17$.

In der Tat ist $\sum_{k=0}^{17} \frac{1}{k!} = 2{,}7182818284590455\ (JAVA7)$ auf 15 Dezimalen genau !

JAVA-Methode für e^x :

```
public static double expReihe(double x, int n) {
      // berechnet sum(x^k/k!,k,0,n)
      if (x == 0)
            return 1;
      boolean negativx = (x < 0);
      if (negativx)
            x = -x;
      boolean reduziert = (x > 0.2);
      int j = 1;
      if (reduziert) {
            // falls x > 0.2:  e^x = (e^(x/j))^j ; j = [5x]
            j = (int) (5 * x);
            x = x / j;
      }
      // Beginn der Iteration
      double sum = 0.0;
      for (int k = n + 1; k > 0; k--)
            sum = sum / k * x + 1;

      // Alternative mit Fakultät und Potenzen
      // for (int k = n; k >= 0; k--)
      // sum = sum + Math.pow(x, k) / fak(k);

      if (reduziert)
            sum = Math.pow(sum, j);
      if (negativx)
            sum = 1 / sum;
      return sum;
}
```

2) Die Taylorreihe für ln(x):

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\ldots \quad ;\ -1<x\le 1$$

Da diese Reihe sehr langsam konvergiert, konstruiert man mittels ln(1+x)-ln(1-x) = ln((1+x)/(1-x)) eine neue, besser konvergierende Reihe.

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(-x)^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\ldots-(-x-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}\mp\ldots)$$

Man erkennt, dass sich Potenzen mit geraden Exponenten wegsubtrahieren. Daher bleibt folgendes:

$$\ln(\frac{1+x}{1-x})=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots)=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Die Substitution $y=\frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x=\frac{y-1}{y+1}$ liefert $\ln(y)=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k+1}$

Durch Umbenennung erhält man endlich:

$$\boxed{\ln(x)=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}=2\cdot(\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1})+R_n \quad ;\quad x>0}$$

Für das Restglied gilt: $\boxed{|R_n|=\frac{(x-1)^2}{2\cdot|x|}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}}$

Diese Reihe lässt sich mit der Substitution z = (x-1)/(x+1) einfacher notieren:

$$\boxed{\ln(x)=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}=2\cdot(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots)\ ;\ z=\frac{x-1}{x+1}}$$

Die Reihe konvergiert am besten in der Nähe von x=1 .

Deswegen sollte man x in Faktoren zerlegen, die in der Nähe von 1 liegen, falls x > √2 ≈ 1,414.

Vorgehensweise:

Man zerlegt x in $2^m\cdot 2^{-m}\cdot x$ mit geeignetem m. So erhält man wegen ln(x) = ln(ab)=ln(a)+ln(b) folgendes:

ln(x) = $\ln(2^m)+\ln(x/2^m)=\ln(2^{2m/2})+\ln(x/2^m)=2m\cdot\ln(2^{1/2})+\ln(x/2^m)=$ **$2m\cdot\ln(\sqrt{2})+\ln(x/2^m)$** .
Dabei sollte $x/2^m$ zwischen $1/\sqrt{2}$ und √2 liegen . Wie erreicht man das ?
Am besten dividiert man x so lange durch 2, bis das Ergebnis unter √2 liegt.

Beispiel: x = 12500

2500/2 = 1250 1250/2 = 1125 1125/2 = 562,5 …. Ergebnis: $2500/2^{11}$ = 1,2207... < √2
Mit m=11 erhalten wir: $\ln(2500/2^{11})=22\ln(\sqrt{2})+\ln(2500/2^{11})$

Tipp: Falls **0 < x < 1**, dann verwende man ln(1/x) = ln(1) – ln(x) = -ln(x) bzw **ln(x) = -ln(1/x)**

Beispielrechnung für ln(2) mit Restgliedabschätzung:

Wir wollen ln(2) auf 15 Dezimalen genau berechnen, d.h. $|R_n| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$

Aus dem Ansatz $R_n < 10^{-15}$ folgt:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} < 10^{-15} \Leftrightarrow 3^{2n} > \frac{1}{2} \cdot 10^{15} \Leftrightarrow 2n \cdot \lg(3) > \lg(\frac{1}{2}) + 15 \Leftrightarrow n > \frac{15 - \lg(2)}{2 \cdot \lg(3)} \approx 15,4$$

Daher sollte n=16 für die vorgegebene Genauigkeit genügen. Wir berechnen also (mit JAVA 7)

$\ln(2) \approx \sum_{k=0}^{16} \frac{2}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = 0.6931471805599455$. Dies ist auf 15 Dezimalen genau !

Beispielrechnung für ln(100) mit Restgliedabschätzung:

$$\frac{99^2}{2 \cdot 100} \cdot \left(\frac{99}{101}\right)^{2n} < 10^{-15} \Leftrightarrow \left(\frac{101}{99}\right)^{2n} > \frac{9801}{2} \cdot 10^{13} \Leftrightarrow 2n \cdot \lg(\frac{101}{99}) > \lg(\frac{9801}{2}) + 13 \Leftrightarrow n > \frac{13 + \lg(\frac{9801}{2})}{2 \cdot \lg(\frac{101}{99})} \approx 960,7$$

Immerhin müssen wir hier schon bis n=961 rechnen, um die vorgegebene Genauigkeit zu erreichen.

Wir berechnen also (mit JAVA 7) $\ln(100) \approx \sum_{k=0}^{961} \frac{2}{2k+1} \cdot \left(\frac{99}{101}\right)^{2k+1} = 4.60517018598809$.

14 Dezimalen sind genau, die 15. wird nicht angezeigt (müsste aber definitiv 1 sein !)

Fazit: Die oben angegebene Transformation **$\ln(x) = 2m \cdot \ln(\sqrt{2}) + \ln(x/2^m)$** ist aus Geschwindigkeitsgründen auf jeden Fall der direkten Methode vorzuziehen.

Die Berechnung mit Transformation liefert für n=17: ln(100) = `4.605170185988093` (14 Stellen genau)

Alternativ: Man kann auch **$\ln(x) = 2 \cdot \ln(\sqrt{x})$** verwenden (evtl. mehrmals), um x zu verkleinern !

JAVA-Methode:

```
public static double lnReihe(double x, int n) {
      // ln(x) = 2*sum(z^(2k+1)/(2k+1),k,0,n); z=(x-1)/(x+1)
      if (x <= 0)

      throw new ArithmeticException("x muss positiv sein !");
      if (x == 1)
            return 0;
      boolean kleiner1 = (x < 1);
      if (kleiner1)
            x = 1 / x;
      int m = 0;
      boolean reduziert = (x > 1.414);
      if (reduziert) {
            // ln(x) = 2m·ln(sqrt(2)) + ln(x/2^m)
            do {
                  x = x / 2;
                  m = m + 1;
            } while (x > 1.414);
      }
      double z = (x - 1) / (x + 1);
      double sum = 0;
      int expo;
      for (int k = n; k >= 0; k--) {
            expo = 2 * k + 1;
            sum = sum + Math.pow(z, expo) / expo;
      }
      sum = 2 * sum;
      if (reduziert) {
            double sum2 = 0;
            x = Math.sqrt(2);
            z = (x-1)/(x+1);
            for (int k = n; k >= 0; k--) {
                  expo = 2 * k + 1;
                  sum2 = sum2 + Math.pow(z, expo) / expo;
            }
            sum = sum + 4 * m * sum2;
      }
      if (kleiner1)
            sum = -sum;
      return sum;
}
```

3) Die Taylorreihe für sin(x) :

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\pm\ldots+(-1)^k\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_n\ ;\ x\in\mathbb{R}$$

Für das sog. "Restglied" R_n gilt: $R_n=(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cos(\vartheta\cdot x)\ mit\ 0<\vartheta<1$

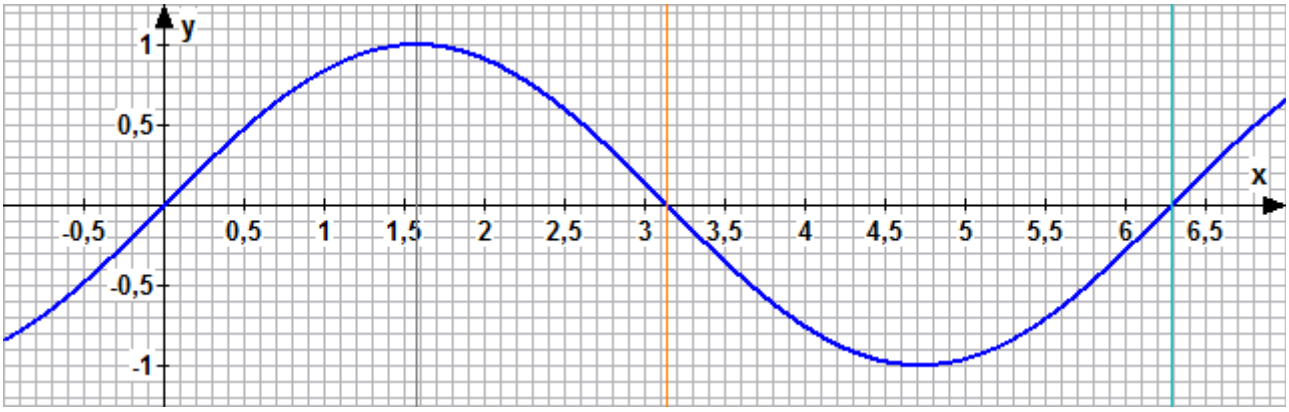
Das Restglied liegt zwischen $(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cos(x)$. Maximaler Fehler: $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Wählt man jedoch **0 < x < π / 2** , dann ist der Fehler kleiner als $\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

So benötigt man n=10 für 15 richtige Dezimalen . Evtl. reicht auch n=9 oder ein noch kleineres n.

Wie transformiert man nun eine Zahl x so, dass sie in den Bereich [0 ; π /2] fällt ??

Dazu verwendet man die Periodizität des Sinus sowie andere Eigenschaften (s. Grafik) :



Für x = 0 gilt sin(0) = 0 und für x = π /2 gilt sin(π /2) = 1
Für x < 0 verwendet man: sin(x) = -sin(-x) .
Für x ≥ 2π verwendet man: sin(x) = sin(x-n·2π) ; man ersetzt x = x-2π , so lange x ≥ 2π .
Für π ≤ x < 2π verwendet man: sin(x) = -sin(x- π) .
Für π π /2 < x < π verwendet man: sin(x) = sin(π -x) .

Beispielrechnung für sin(2) mit Restgliedabschätzung:

x=2 muss zuerst transformiert werden mittels sin(2) = sin(π -2) .

Wir wollen sin(2) = sin(π -2) auf 15 Dezimalen genau berechnen, d.h. $\frac{(\pi-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cos(\pi-2)<10^{-15}$

Durch Probieren findet man n = 9 . Daher ist zu berechnen:

$$\sin(2)\approx\sum_{k=0}^{9}(-1)^k\frac{(\pi-2)^{2k+1}}{(2k+1)!}=0{,}9092974268256816$$ Sogar alle 16 Stellen (mit JAVA 7) sind korrekt !

Beispielrechnung für sin(-25) :

x=-25 muss zuerst transformiert werden:
sin(-25) = -sin(25) = -sin(25-3·2π) = sin(25-3·2π-π) = sin(π-(25-3·2π-π)) .
Vereinfacht ist das sin(8π-25) .

Da 8π-25=0,13 sehr klein ist, reicht hier eine Rechnung mit n = 5:

$$\sin(-25) \approx \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \frac{(8\pi - 25)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0{,}13235175009777206$$ 14 Stellen (mit JAVA 7) sind korrekt !

Betrachtung von cos und tan :

Der Cosinus lässt sich wegen cos(x) = sin(x+π /2) auf den Sinus zurückführen !

Der Tangens lässt sich wegen tan(x) = sin(x) / sin(x+π /2) auf den Sinus zurückführen !

JAVA-Methoden:

```
public static double sinReihe(double x, int n) {
      // berechnet sum((-1)^k*x^(2k+1)/(2k+1)!,k,0,n)
      final double doppelPi = 2 * PI;
      final double halbePi = PI / 2;
      boolean negativ = false;
      if (x != 0) {
            // transformiere ggfs.
            negativ = (x < 0);
            if (negativ)
                  x = -x;
            while (x >= doppelPi)
                  x = x - doppelPi;
            if (x >= PI) {
                  x = x - PI;
                  negativ = !negativ;
            }
            if (x > halbePi)
                  x = PI - x;
      }
      if (x == 0)
            return 0;
      int vz = 1;
      double sum = 0.0;
      for (int k = 0; k <= n; k++) {
            sum = sum + vz / fak(2 * k + 1) * Math.pow(x, 2 * k + 1);
            vz = -vz;
      }
      if (negativ)
            return -sum;
      else
            return sum;
}

public static double cosReihe(double x, int n) {
      return sinReihe(x + PI / 2, n);
}

public static double tanReihe(double x, int n) {
      return sinReihe(x, n)/sinReihe(x + PI / 2, n);
}
```

4) Die Taylorreihe für arctan(x) :

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\pm\ldots+(-1)^k\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_n\quad;\quad |x|\le 1$$

Für das sog. Restglied R_n gilt: $R_n=(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1+\vartheta\cdot x^2}\ mit\ 0<\vartheta<1$

Die Reihe konvergiert ziemlich langsam und am besten in der Nähe von 0 !

Das Restglied liegt zwischen $(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ und $(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}$. Maximaler Fehler also: $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soll **arctan(1)** auf nk Dezimalen genau sein, muss n so gewählt werden, dass: $\frac{1}{2n+1}<10^{-(nk+1)}$.

Beispiel: nk=15. $\frac{1}{2n+1}<10^{-16}\ \Leftrightarrow\ 2n+1>10^{16}\ \Leftrightarrow\ n\ge 5\cdot 10^{15}$ (evtl. genügt ein kleineres n)

Wählt man jedoch **x < 0,1** , dann ist der Fehler kleiner als $\frac{0{,}1^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 10^{2n+1}}$.

Für nk Nachkommastellen gilt dann: $\frac{1}{(2n+1)\cdot 10^{2n+1}}<10^{-(nk+1)}\ \Leftrightarrow (2n+1)\cdot 10^{2n+1}>10^{nk+1}$ bzw.

$\Leftrightarrow \lg(2n+1)+2n+1>nk+1\ \Leftrightarrow \lg(2n+1)+2n>nk$

Die folgende Tabelle zeigt, wie groß der maximale Folgenindex n mindestens sein muss, damit nk Dezimalen richtig sind (Voraussetzung x < 0,1) :

nk	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	4	4(5)	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10

Fazit: Offensichtlich muss man für diesen Fall **n = nk div 2** wählen .

Wie aber bekommt man die x-Werte unter die Grenze von 0,1 ??

Zur Transformation von |x| > 1 auf den Bereich]0;1[verwendet man $\arctan(x)=2\cdot\arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$

Die Quadratwurzel lässt sich nach Heron schnell berechnen .

In der Regel ist eine **mehrfache** Anwendung der Formel erforderlich. Zum Beispiel gilt

$$\arctan(5)=2\cdot\arctan\left(\frac{5}{1+\sqrt{1+5^2}}\right)=2\cdot\arctan(0{,}81\ldots)=4\cdot\arctan(0{,}35\ldots)=8\cdot\arctan(0{,}17\ldots)=16\cdot\arctan(0{,}08\ldots)$$

Für große x kann man auch auf $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ zurückgreifen, muss dann aber π kennen.

Beispielrechnung für arctan(5) mit Restgliedabschätzung:

x=5 muss zuerst transformiert werden (siehe oben). arctan(5) = 16·arctan(0.08604899056617473) .

Wir wollen arctan(5) auf 15 Dezimalen genau berechnen, d.h.

$\frac{0,08604899..^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1+0} < 10^{-16}$ Laut obiger Tabelle reicht n = 7 . Daher ist zu berechnen:

$\arctan(5) \approx 16 \cdot \sum_{k=0}^{7} (-1)^k \frac{0,0840848515...^{2k+1}}{2k+1} = 1,3734007669450157$ 15 Stellen (JAVA 7) sind korrekt !

JAVA-Methode:

```
public static double arctanReihe(double x, int n) {
      // berechnet sum((-1)^k*x^(2k+1)/(2k+1),k,0,n)
      if (x == 0)
            return 0;
      double faktor = 1;
      boolean negativ = (x < 0);
      if (negativ)
            x = -x;
      while (x > 0.1) {
            // transformiere
            x = x / (1 + Math.sqrt(1 + x * x));
            faktor = faktor * 2;
      }
      int vz = 1;
      double sum = 0.0;
      for (int k = 0; k <= n; k++) {
            sum = sum + vz * Math.pow(x, 2 * k + 1) / (2 * k + 1);
            vz = -vz;
      }
      sum = sum * faktor;
      if (negativ)
            return -sum;
      else
            return sum;
}
```