Die Klothoide (mit TI83 erzeugt) Ac

Die Klothoide (auch: „Cornusche Spirale") wird als Übergangsbogen im Straßenbau verwendet, damit der „Lenkradruck" nicht auftritt . Sie ist <u>parametrisch</u> (x(t),y(t)) über 2 sog. Fresnel-Integrale definiert:

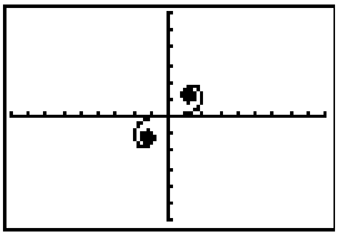
$$x(t) = \int_0^t \cos(\frac{k^2}{2a^2})dk \qquad \text{und} \qquad y(t) = \int_0^t \sin(\frac{k^2}{2a^2})dk \qquad \text{(a ist ein Klothoidenparameter)}$$

<u>Beispiel 1:</u> a= $\sqrt{0{,}5}$

Achtung: Zunächst im MODE-Menü auf **<u>Par</u>** und **<u>Radian</u>** einstellen ! !

```
 Plot1  Plot2  Plot3
\X1T ■fnInt(cos(K
²),K,0,T)
 Y1T ■fnInt(sin(K
²),K,0,T)
\X2T =
 Y2T =
\X3T =
```

```
WINDOW
 Tmin=-8
 Tmax=8
 Tstep=.1
 Xmin=-4.5
 Xmax=4.5
 Xscl=.5
↓Ymin=-3
```

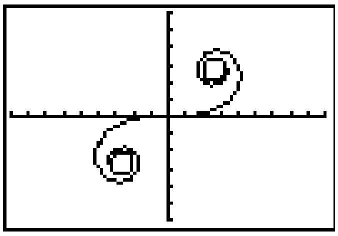


Die Rechenzeit ist ziemlich hoch und hängt von der Größe von Tstep sowie Tmax-Tmin ab ! Bei diesem Beispiel hätte man Tstep auch größer wählen können . Der Wert für Tmin befindet sich innerhalb des linken, der von Tmax innerhalb des rechten Schneckenhauses .

<u>Beispiel 2:</u> a=1,5

```
 Plot1  Plot2  Plot3
\X1T ■fnInt(cos(K
²/4.5),K,0,T)
 Y1T ■fnInt(sin(K
²/4.5),K,0,T)
\X2T =
 Y2T =
\X3T =
```

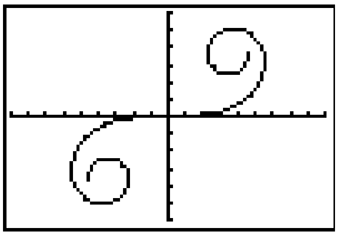
```
WINDOW
 Tmin=-8
 Tmax=8
 Tstep=.1
 Xmin=-4.5
 Xmax=4.5
 Xscl=.5
↓Ymin=-3
```



<u>Beispiel 3:</u> a=2

```
 Plot1  Plot2  Plot3
\X1T ■fnInt(cos(K
²/8),K,0,T)
 Y1T ■fnInt(sin(K
²/8),K,0,T)
\X2T =
 Y2T =
\X3T =
```

```
WINDOW
 Tmin=-8
 Tmax=8
 Tstep=.1
 Xmin=-4.5
 Xmax=4.5
 Xscl=.5
↓Ymin=-3
```



Man erkennt, dass der Graph sich stark vergrößert hat . Je größer a, desto größer der Graph .

Hier noch einige Tabellenwerte für a=2 und t ≥ 0 :

T	X_{1T}	Y_{1T}
0	0	0
.1	.1	4.2E-5
.2	.2	3.3E-4
.3	.3	.00112
.4	.39998	.00267
.5	.49995	.00521
.6	.59988	.009

Y_{1T}=.0089986983

T	X_{1T}	Y_{1T}
.7	.69974	.01429
.8	.79949	.02132
.9	.89908	.03035
1	.99844	.04162
1.1	1.0975	.05537
1.2	1.1961	.07183
1.3	1.2942	.09125

Y_{1T}=.0912502814

T	X_{1T}	Y_{1T}
7.4	2.0251	1.3016
7.5	2.1043	1.3625
7.6	2.1708	1.437
7.7	2.222	1.5227
7.8	2.2559	1.6166
7.9	2.2709	1.7153
8	2.2663	1.815

Y_{1T}=1.8150268399

Mit TI-nspire CAS:

Parameterfunktion definieren:

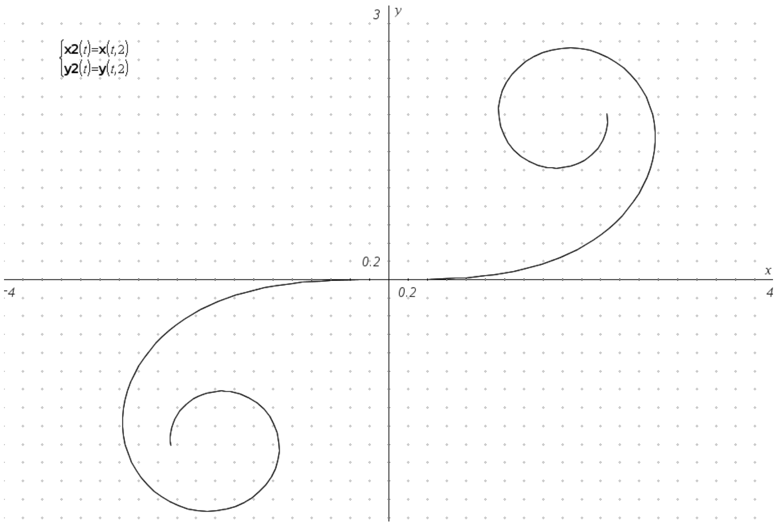
$$x(t,a):=\int_0^t \cos\left(\frac{k^2}{2\cdot a^2}\right)dk$$

$$y(t,a):=\int_0^t \sin\left(\frac{k^2}{2\cdot a^2}\right)dk$$

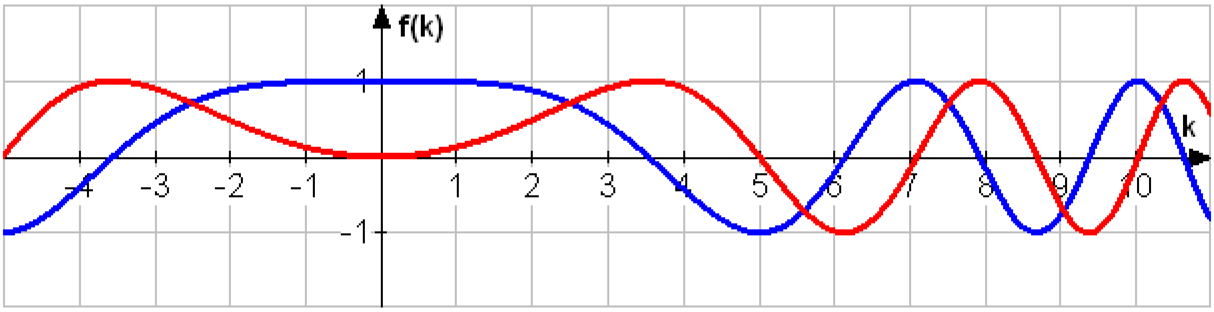
Einige Werte sind rechts tabelliert .

t	x(t)	y(t)
0	0	0
.1	.1	.000042
.2	.2	.000333
.3	.299996	.001125
.4	.399984	.002667
.5	.499951	.005208
.6	.599879	.008999
.7	.699737	.014288
.8	.799488	.021324
.9	.899078	.030353
1.	.998439	.04162
1.1	1.09749	.055368
1.2	1.19612	.071834
1.3	1.29421	.09125
1.4	1.39162	.113844
1.5	1.48818	.139832
1.6	1.58369	.169422
1.7	1.67795	.202808
1.8	1.7707	.240168

Graph mit tmin=-8 tmax=8 tstep=0.1 zeichnen:



Zusätzliche Betrachtung: **Die Funktionen** $\cos(\frac{k^2}{8})$ **und** $\sin(\frac{k^2}{8})$



sin (rot) cos (blau)

<u>Betrachtung zunächst im positiven Bereich von k bzw. t:</u>

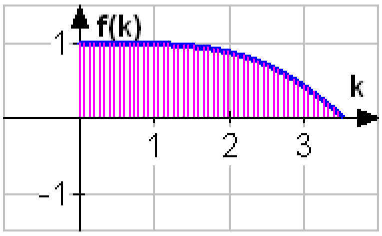
Die Integralfunktionen I(t)= $\int_0^t f(k)dk$ steigen erst an, nehmen aber dann später wieder ab.

Bei sin() ist das ab k≈5,01 der Fall, bei cos() ab k≈3,54 (Berechnung mit dem SOLVER). Die I(t) werden aber für positive t weder negativ noch 0, sondern sie pendeln im positiven Bereich immer hin und her! So kommt es zu dem „Schneckenhaus" bei der Klothoide.

Im negativen k-Bereich (t-Bereich) gibt es umgekehrt nur negative I(t)-Werte, weil sich dort die Integrationsgrenzen vertauschen !

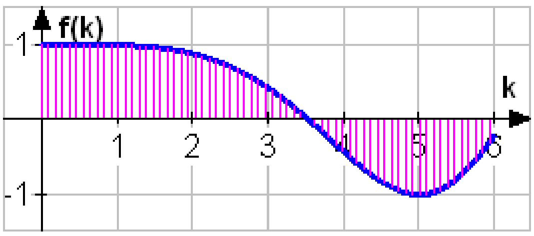
<u>Drei Beispiele mit cos( ) zur Veranschaulichung:</u>

$I(3{,}5) = \int_0^{3{,}5} \cos(\frac{k^2}{8})dk \approx 2{,}764$

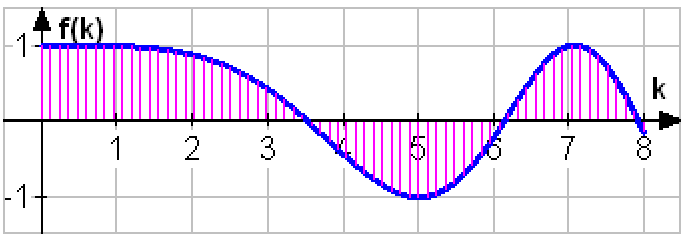


$I(6) = \int_0^{6} \cos(\frac{k^2}{8})dk \approx 1{,}153$

Ein Flächenanteil unterhalb der k-Achse !



$I(8) = \int_0^{8} \cos(\frac{k^2}{8})dk \approx 2{,}266$



Diese Ergebnisse stimmen mit den Tabellenwerten des TI83 überein (s.oben). Dort wurden die Integrale bekanntlich mittels fnInt approximativ berechnet.