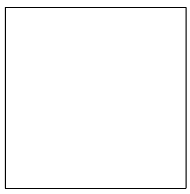
Rekursion und Iteration - Folgen und Web-Diagramme   Ac

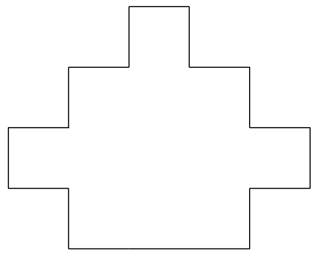
Einführungsbeispiel „Quadratpflanze“

Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1m wächst wie in der Grafik beschrieben:

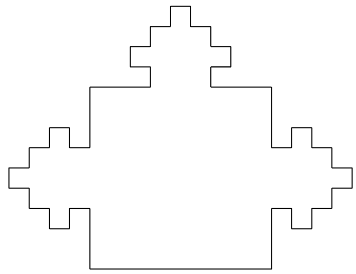
Figur1



Figur2



Figur3



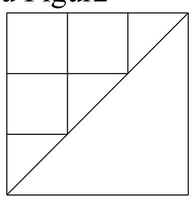
Täglich kommt eine Generation neuer Quadrate hinzu, deren Seitenlänge nur noch ein Drittel der Seitenlänge in der vorangegangenen Generation beträgt .

Fragen:
- Überwuchert die Pflanze eines Tages das ganze Zeichenblatt ?
- Wird der Rand der Pflanze eines Tages länger als 1km oder gar 100km ?

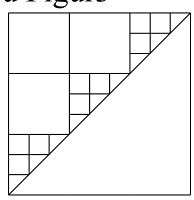
Für den <u>Flächeninhalt</u> lässt sich die entsprechende Frage durch eine geometrische Umordnung der <u>zusätzlich</u> zu Fig.1 hinzugekommenen Flächenteile beantworten.

Wie man leicht sieht, hat kann die Gesamtfläche eine gewisse Schranke (Grenzwert) nicht übertreffen , und zwar ist dies die Grenze $A = 1{,}5\ m^2$
(Erläuterung ??`)

Zu Figur2



Zu Figur3



Was hat das ganze mit **<u>Folgen</u>** zu tun ?

Aufgaben:

a) Schreibe nacheinander für die Figuren 1, 2, 3, 4, 5, … die Flächeninhalte auf (Einheit m^2):

b) Finde eine allgemeine Formel für die n-te Figur (bzw. Figur Nummer n).
Was versteht man unter einer Folge ? Wie unterscheidet man „explizit“ und „rekursiv“ ?

<u>Lösungen:</u>

a) $A_1 = 1 \qquad A_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad A_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}$ usw.

Die Tabelle unten zeigt weitere Folgenglieder (exakt und approximiert) .
Diese werden mit dem CAS **Derive folgendermaßen** erzeugt:
a(n):=if(n>1,a(n-1)/3+1,1) sowie
vector([n,a(n)],n,1,15) und **vereinfachen approximieren**

n	A(n)	n	A(n)
1	1	1	1
2	$\frac{4}{3}$	2	1.333333333
3	$\frac{13}{9}$	3	1.444444444
4	$\frac{40}{27}$	4	1.481481481
5	$\frac{121}{81}$	5	1.493827160
6	$\frac{364}{243}$	6	1.497942386
7	$\frac{1093}{729}$	7	1.499314128
8	$\frac{3280}{2187}$	8	1.499771376
9	$\frac{9841}{6561}$	9	1.499923792
10	$\frac{29524}{19683}$	10	1.499974597
11	$\frac{88573}{59049}$	11	1.499991532
12	$\frac{265720}{177147}$	12	1.499997177
13	$\frac{797161}{531441}$	13	1.499999059
14	$\frac{2391484}{1594323}$	14	1.499999686
15	$\frac{7174453}{4782969}$	15	1.499999895

b) Eine allgemeine Vorschrift für diese Folge von Flächeninhalten lautet offensichtlich

$$\boxed{A_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + (\frac{1}{3})^{n-1}}$$

Dies nennt man ein **<u>explizites</u>** Bildungsgesetz .

Im Gegensatz zum expliziten Bildungsgesetz gibt es auch ein **<u>rekursives</u>** !
Hierbei wird das jeweilige n-te Folgenglied mithilfe des vorherigen, nämlich des (n-1)-ten Gliedes berechnet . Mögliche rekursive Formeln für dieses Problem sind (bitte nachprüfen !):

$$\boxed{A_n = \frac{1}{3} A_{n-1} + 1 \quad mit \;\; A_1 = 1}$$ oder auch

$$A_n = A_{n-1} + (\frac{1}{3})^{n-1} \quad mit \;\; A_1 = 1$$

<u>Anmerkung:</u> Die zweite Möglichkeit des rekursiven Bildungsgesetzes lässt sich leider nicht in ein Cob-Web-Diagramm (siehe weiter unten) umsetzen, weil ein direkter Bezug zu n vorliegt. Bezüge zu n (z.B. Vielfache von n) können mit solchen Diagrammen jedoch nicht dargestellt werden. Daher favorisieren wir die obige erste Möglichkeit, in der nur A_n und A_{n-1} vorkommen !

<u>Eine Folge</u> ist eine Funktion $n \to a_n$, wobei der Definitionsbereich aus natürlichen Zahlen und der Wertebereich aus reellen Zahlen besteht .

Darstellung von Folgen mit dem GTR TI83

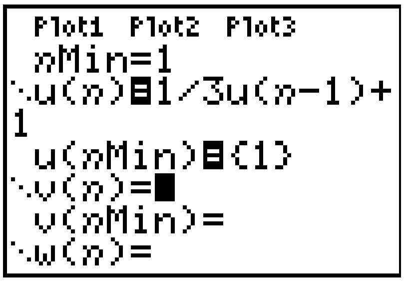
Der GTR kann Folgen auf verschiedene Arten darstellen. Eine elementare Möglichkeit der Darstellung von Folgen mit dem TI83 besteht in der Verwendung des *Folgenmodus*

Hier muss unter MODE die Option **seq** (Sequenz) eingestellt werden. Außerdem im FORMAT –Menü **Time** wählen. Im Y= - Menü wird nun die Formel eingegeben, wobei entweder eine **explizite** oder eine **rekursive** Formel gewählt werden kann. Die explizite Formel darf aber keine Summenformel wie in unserem Beispiel oben sein, weil der Rechner diese nicht verarbeiten kann. Aus diesem Grund verwend-en wir hier die obige rekursive Formel mit

$A_n = \frac{1}{3} A_{n-1} + 1 \quad mit \;\; A_1 = 1$.

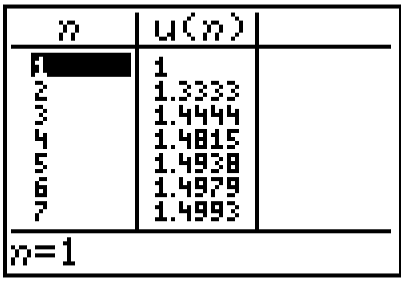
Beachtet werden muss noch, dass der TI83 statt A_n nur u(n) oder v(n) oder w(n) akzeptiert. Verwenden wir zum Beispiel u(n), so lautet die rekursive Form: u(n) = 1/3u(n-1)+1 und u(1) = 1

Y=

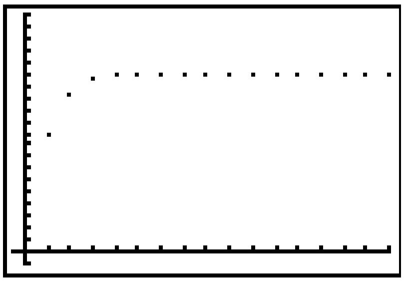


Rekursive Eingabe !

TABLE



GRAPH



Eine explizite Darstellung für dieses Beispiel im Folgenmodus des TI83 gelingt ebenfalls, sofern man obige Summenformel in eine geschlossene Form bringt. Aus der leicht zu beweisenden allgemeinen Beziehung

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$ (dies ist eine sogenannte Geometrische Reihe !)

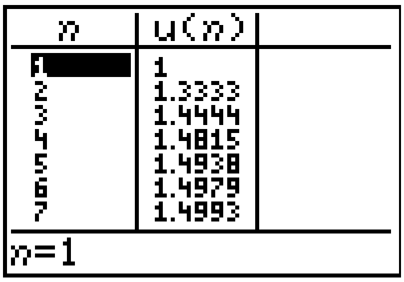
folgt für unser Beispiel : $\boxed{A_n = 1{,}5 \cdot [1 - (\frac{1}{3})^n]}$

Umsetzung mit dem seq-Modus des TI83:

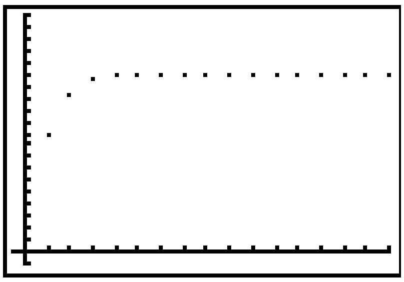
Y=

Explizite Eingabe !

TABLE



GRAPH



Beachte, dass hier für u(nMin) nichts einzugeben ist, weil die explizite Formel diesen Startwert automatisch selbst berechnet !

Wir sehen, dass das Ergebnis (Tabelle; Graph) das gleiche ist wie bei der rekursiven Version.
Hinweis: Die „Web-Darstellung" der rekursiven Version wird später behandelt !

Übungen: Schroedel-Buch (S/37) !

Alternative: Folgenglieder mit Listen berechnen

Eine ganz andere Möglichkeit der Darstellung (Berechnung) von Folgen besteht darin, *Listen* zu verwenden (erreichbar mit STAT – EDIT). Damit kann man auch diejenigen Folgen berechnen, die durch unendliche Summen gegeben sind, z.B. obige Folge mit

$$A_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + (\frac{1}{3})^{n-1}$$

In der <u>untersten</u> Zeile einer Liste steht immer die Anweisung zur automatischen Erzeugung aller Zahlen in der jeweiligen Spalte . Die unter den Listenköpfen L_1, L_2, L_3 stehenden Texte sind lediglich Kommentare, die nur zum besseren Verständnis dienen und nicht eingetippt werden können:

L_1 (Nummerierung)	L_2 Term (1/3)^(n-1)	L_3 (kumulierte Summe von L_2)
1	1	1
2	.3333	1.3333
3	.1111	1.4444
…	…	
30	1E-14	1.5
L_1 = seq(X,X,1,30)	L_2 = (1/3)^(L_1-1)	L_3 = cumsum(L_2)

Man kann hier offensichtlich den Grenzwert G = 1,5 vermuten .

Das Längenproblem der „Quadratpflanze“

Für die Umfänge (in der Einheit m) gilt:

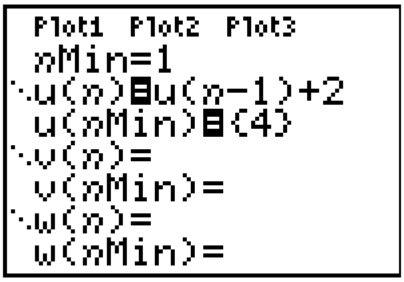
$U_1 = 4$
$U_2 = 4+2 = 6$
$U_3 = 6+2 = 8$
…
$U_n = 2+2n$ explizite Darstellung
Bei der expliziten Darstellung kann jedes Folgenglied direkt (ohne Kenntnis des vorhergehenden) berechnet werden.

Eine rekursive Darstellung ist hier leicht zu erkennen:
Jeder Umfang kann unter Zuhilfenahme des vorherigen Umfangs berechnet werden.
Beispielsweise ist $U_2 = 4+2 = U_1 + 2$.
Ebenso ist $U_3 = 6+2 = U_2 + 2$.

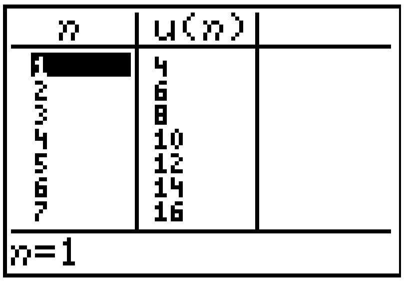
Allgemein gilt daher
$U_n = U_{n-1} + 2$ mit dem Startwert **$U_1 = 4$**. **rekursive Darstellung**

Die rekursive Form wird mit dem TI83 folgendermaßen verarbeitet:

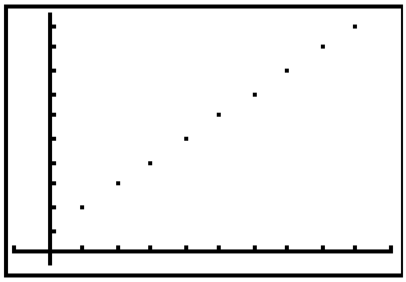
Y=



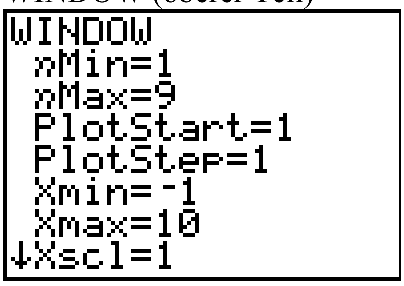
TABLE



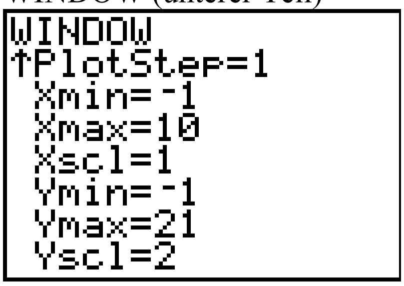
GRAPH



WINDOW (oberer Teil)



WINDOW (unterer Teil)



<u>**Beispiel:**</u> Für eine Länge von 1km benötigt die Pflanze 499 Tage !
Wie man leicht sieht, gibt es hier keinen Grenzwert, denn U_n wächst „über alle Grenzen“ .

Eine relativ komplizierte Betrachtung liefert das folgende Beispiel:

Das kumulierte Volumen

Ein anderes Beispiel soll zeigen, dass ein Grenzwert nicht unbedingt existieren muss, obwohl es aufgrund der Anschauung so aussieht :

Ein hoher Standzylinder mit der Grundfläche 1dm^2 wird portionsweise mit Wasser gefüllt. Zur Anfangsmenge 1 Liter kommen nach jeweils 1 min ½ Liter, 1/3 Liter usw. hinzu. Das jeweilige Volumen lässt sich leicht berechnen nach der Formel:

$$\boxed{V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

Dies ist eine „harmonische Reihe“ !

Im Listen-Modus erhält man folgende Ergebnisse:

L1	L2	L3
1	1	1
2	.5	1.5
3	.33333	1.8333
4	.25	2.0833
5	.2	2.2833
6	.16667	2.45
7	.14286	2.5929

L2 ="1/L1"

L1	L2	L3
100	.01	5.1874
101	.0099	5.1973
102	.0098	5.2071
103	.00971	5.2168
104	.00962	5.2264
105	.00952	5.2359
106	.00943	5.2454

L3(106) =5.2453643...

L1	L2	L3
295	.00339	6.2659
296	.00338	6.2693
297	.00337	6.2726
298	.00336	6.276
299	.00334	6.2793
300	.00333	6.2827
------		------

L2(301) =

Es sieht nach einem Grenzwert aus, denn die Zuwächse werden immer geringer.
Dennoch kann man mittels einer algebraischen Umformung beweisen, dass das Volumen „über alle Grenzen“ wächst .

<u>Beweis der Divergenz der sog. „harmonischen Reihe“ :</u>

Speziell für n = 2^k kann man folgende Umformung vornehmen:

$$\begin{aligned}
V_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ \ldots\ + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \ldots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + k\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Also ist das Volumen für n = 2^k größer als 1 + 0,5k. Daher wächst es über alle Grenzen ! q.e.d.

Konstruktion von Web-Diagrammen

Am Beispiel der „Quadratpflanze“ soll erläutert werden, wie man Web-Diagramme (genauer: Cob-Web-Diagramme = Spinnweb-Diagramme) konstruiert.

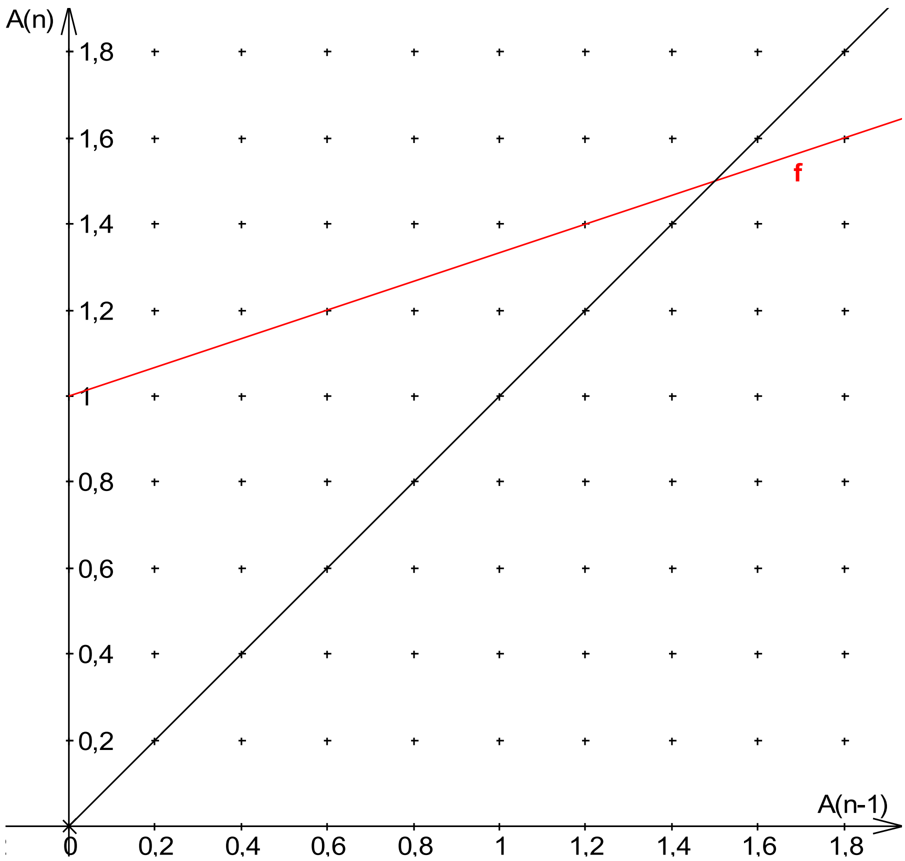
Solche Diagramme werden bei <u>rekursiven Folgen</u> verwendet.
Ist die Folge z.B. durch A(n) definiert, so muss eine Abhängigkeit von A(n-1) bekannt sein. Eine direkte Abhängigkeit von n darf aber nicht vorliegen, weil auf beiden Achsen lediglich A(n) und A(n-1) vorkommen ! Unbrauchbar für die Web-Darstellung ist also z.B. $A(n) = 2A(n-1) + 3n$.
Außerdem dürfen sich die Rekursionsebenen nur um 1 Ebene unterscheiden. Z.B. ist die Darstellung der Fibonacci-Folge mit $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ mit $F(1) = F(2) = 1$ nicht möglich.

Für die Quadratpflanze lautet die Vorschrift: $A(n) = \frac{1}{3}A(n-1) + 1; \quad A(1) = 1 \qquad (*)$

Wie man sieht, ist bei der Rekursion ein Startwert, hier A(1), wichtig !

Im Web-Diagramm wird auf der Rechtsachse stets A(n-1) und auf der Hochachse A(n) eingetragen.
Also: Für jedes Folgenglied A(n-1) erhält man als <u>Funktionswert f das Folgenglied A(n).</u> Dieser Funktionswert f wird gemäß der rekursiven Vorschrift berechnet bzw. erzeugt.

Im Fall der Quadratpflanze ist $f = \frac{1}{3}A(n-1) + 1$. Dies ist eine Geradengleichung . Das erkennt man am besten, wenn man in der Gleichung (*) für A(n) das Symbol y setzt und für A(n-1) das Symbol x .
Welche Gleichung mit x und y ergibt sich dann ?
Wir brauchen daher im A(n-1)-A(n)-Diagramm eine Gerade mit der Gleichung (*) . Zusätzlich zeichnen wir noch die Winkelhalbierende (Gleichung: A(n) = A(n-1)) des ersten Quadranten ein. Der Sinn dieser Geraden ergibt sich aus der Konstruktionsvorschrift (siehe unten).



Konstruktionsvorschrift für die Web-Grafik:

1) Startwert A(1) auf der <u>Rechtsachse</u> suchen und von dort einen senkrechten Pfeil zeichnen bis zum Graphen der Funktion f .

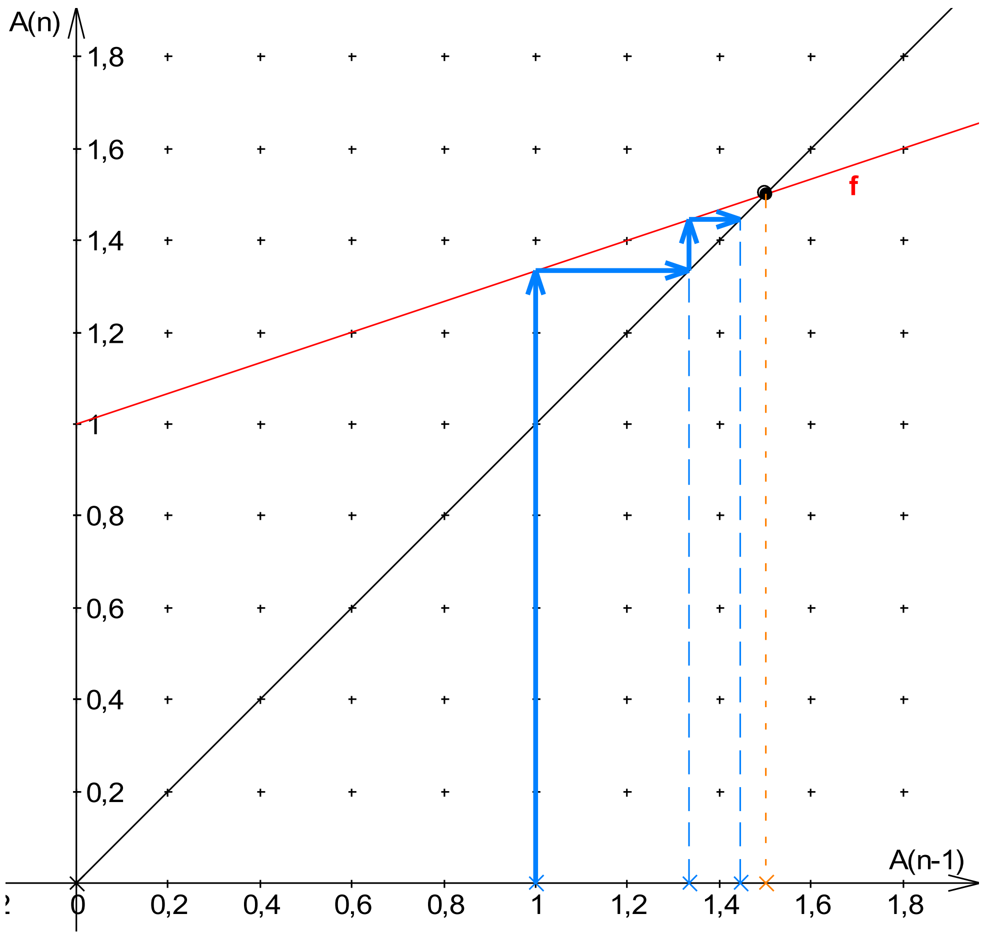
2) Von dort aus einen Pfeil nach rechts ziehen bis zur Winkelhalbierenden.

3) Von dort aus
- eine senkrechte gestrichelte Linie zur Rechtsachse ziehen sowie
- einen senkrechten Pfeil zeichnen bis zum Grafen der Funktion f .

4) Schritte 2) und 3) mehrmals wiederholen .

Wo befindet sich der Grenzwert G ??
Wie kann man diesen Grenzwert exakt berechnen ?

Lösung:

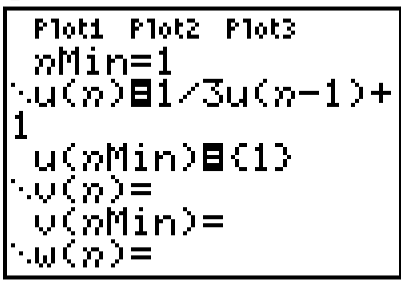


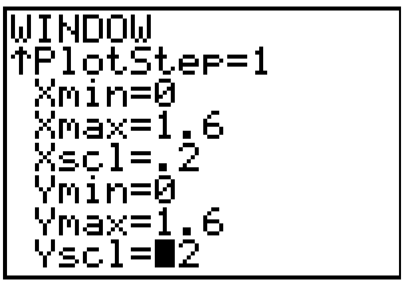
Man erkennt, dass es einen Grenzwert gibt, und zwar dort, wo sich die beiden Geraden schneiden.
Berechnung des Grenzwertes:
Für den Schnittpunkt gilt A(n) = A(n-1) . Setzt man jetzt für A(n) den rekursiv definierten Term ein, so folgt die Gleichung $A(n-1) = \frac{1}{3}A(n-1) + 1$. Die Lösung dieser Gleichung ist A(n-1) = A(n) = 1,5.
Der Grenzwert dieser rekursiven Folge ist daher G = 1,5 (Flächeneinheiten) .

Anmerkung: Der Funktionsgraf von f im Web-Diagramm muss nicht unbedingt eine Gerade sein, sondern er kann der Graf einer beliebigen Funktion (je nach Anwendungsbeispiel) sein. Zum Beispiel ergibt sich bei der Heron-Folge mit u(n) = 0,5[u(n-1) + a/u(n-1)] ; a > 0 (Radikand) eine Hyperbel.

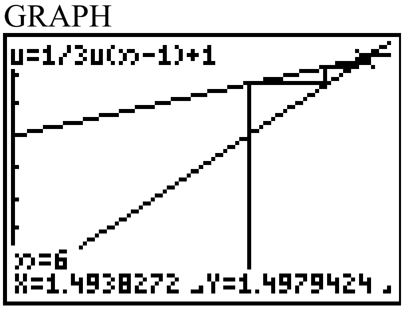
Hier noch die Web-Darstellung des Quadratpflanzenproblems (Fläche) mit dem TI83.
Achtung: Zuerst im **Format**-Menü auf **Web** stellen (statt auf Time) ! Später im Graph-Modus die **Trace**-Taste drücken und fortwährend mit der **rechten Cursortaste** die „Web-Pfeile" erzeugen .

Y=





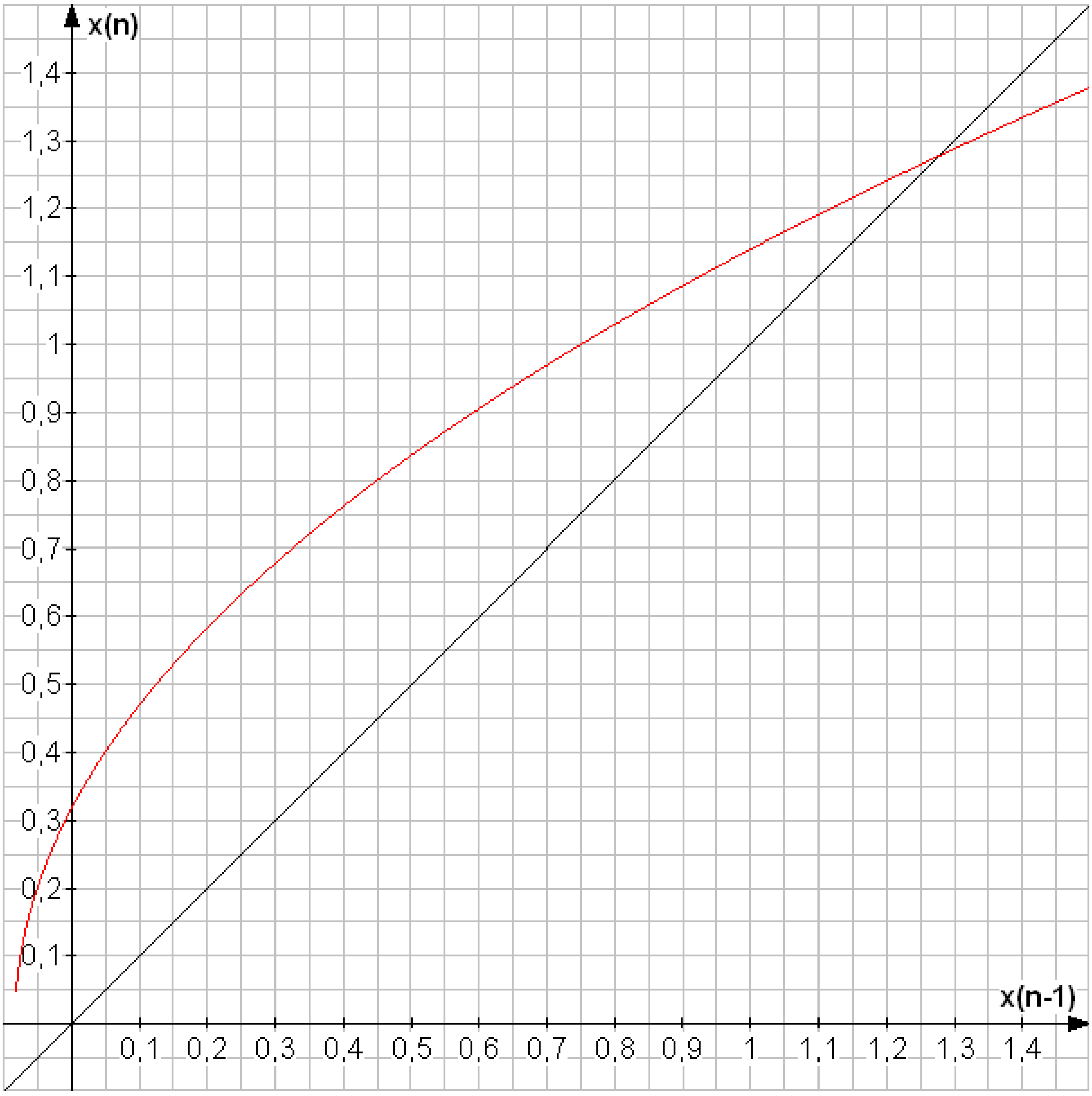
GRAPH



Arbeitsblatt 1 Web-Diagramme

Es sei $f(x) = \sqrt{1,2x + 0,1}$

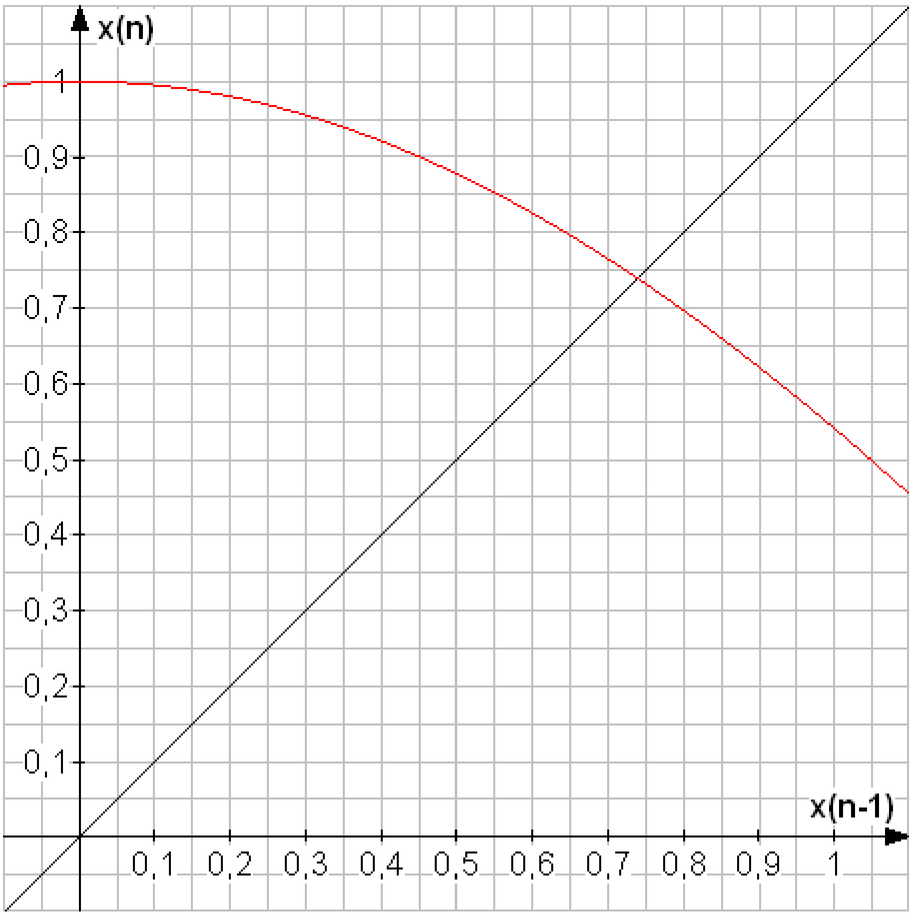
Zeichne das Web-Diagramm und untersuche, ob ein Grenzwert G existiert.
Berechne den Grenzwert exakt, sofern er existiert .
Verwende den Startwert $x_o = 0,3$.
Probiere zusätzlich den Startwert 1,45 aus !



Rechnung:

Arbeitsblatt 2 Web-Diagramme

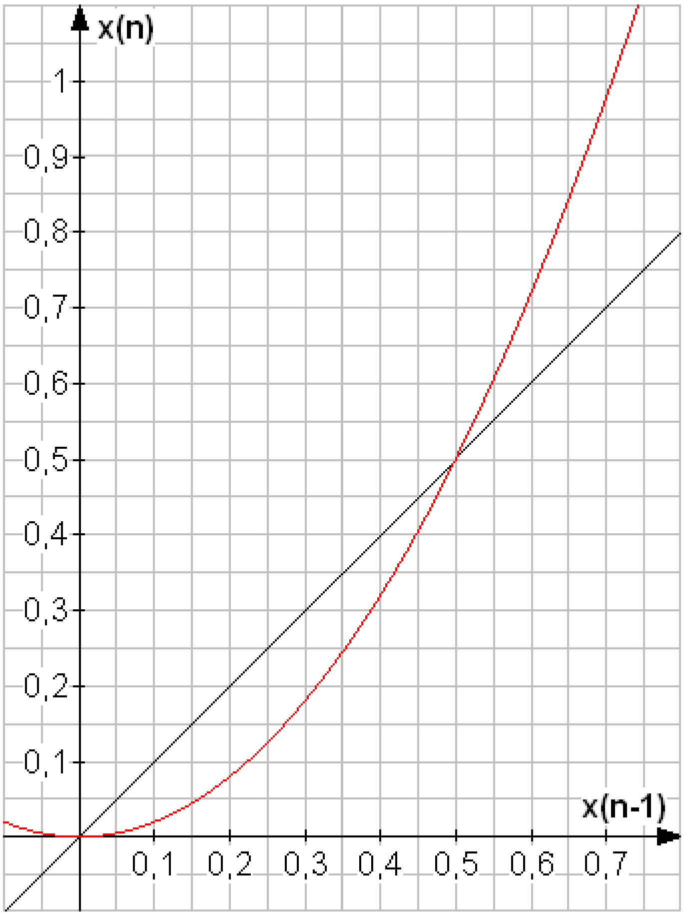
Es sei $f(x) = \cos(x)$.
Zeichne das Web-Diagramm und untersuche, ob ein Grenzwert G existiert.
Berechne den Grenzwert approximativ, sofern er existiert .
Verwende den Startwert $x_o = 0{,}2$



Rechnung:

Arbeitsblatt 3 Web-Diagramme

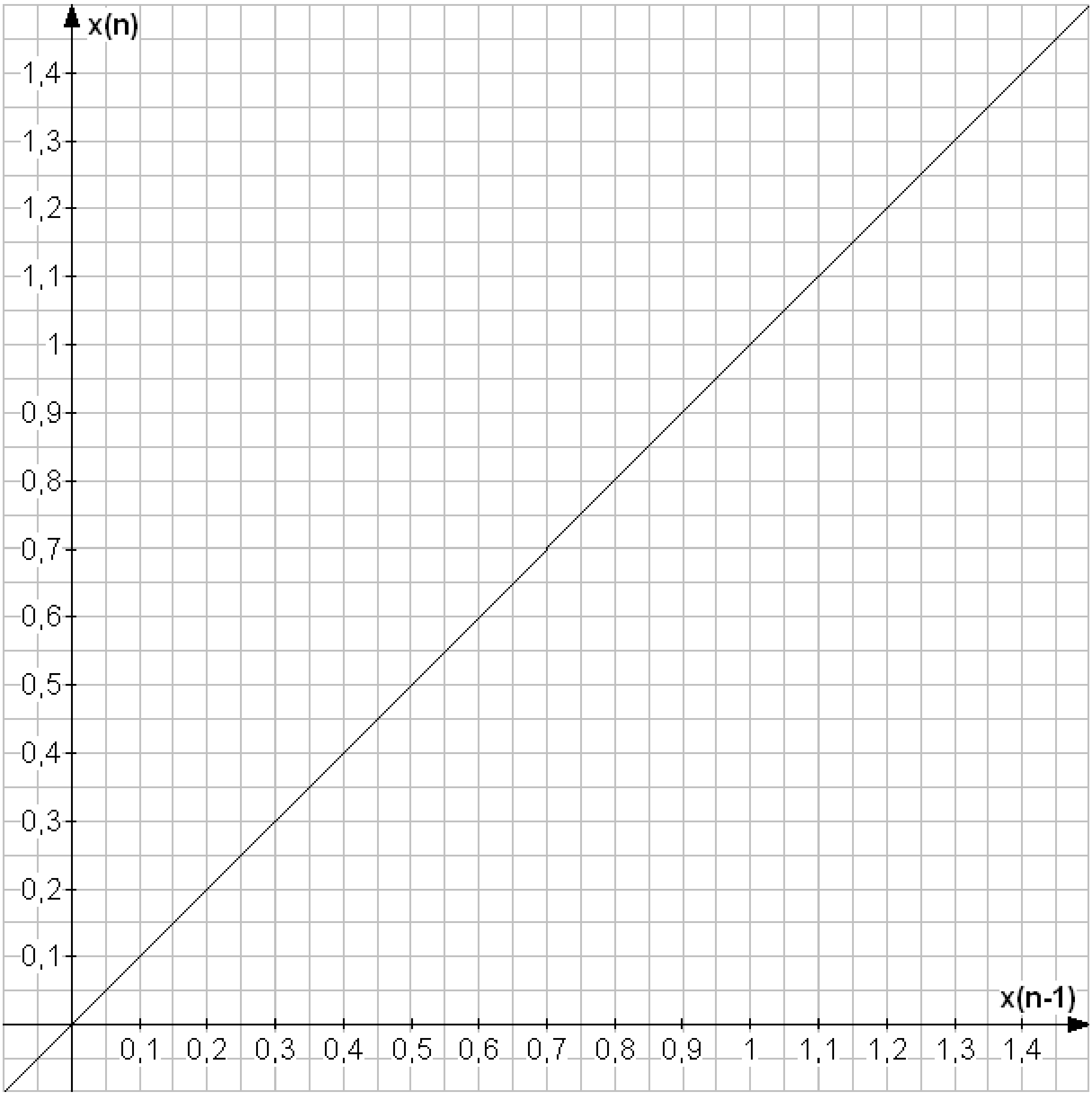
Es sei $f(x) = 2x^2$.
Zeichne das Web-Diagramm und untersuche, ob ein Grenzwert G existiert.
Berechne den Grenzwert exakt, sofern er existiert .
Verwende nacheinander die beiden Startwerte $x_o = 0{,}6$ sowie $x_o = 0{,}4$.
Was fällt auf ?



Rechnung:

Arbeitsblatt 4 Web-Diagramme

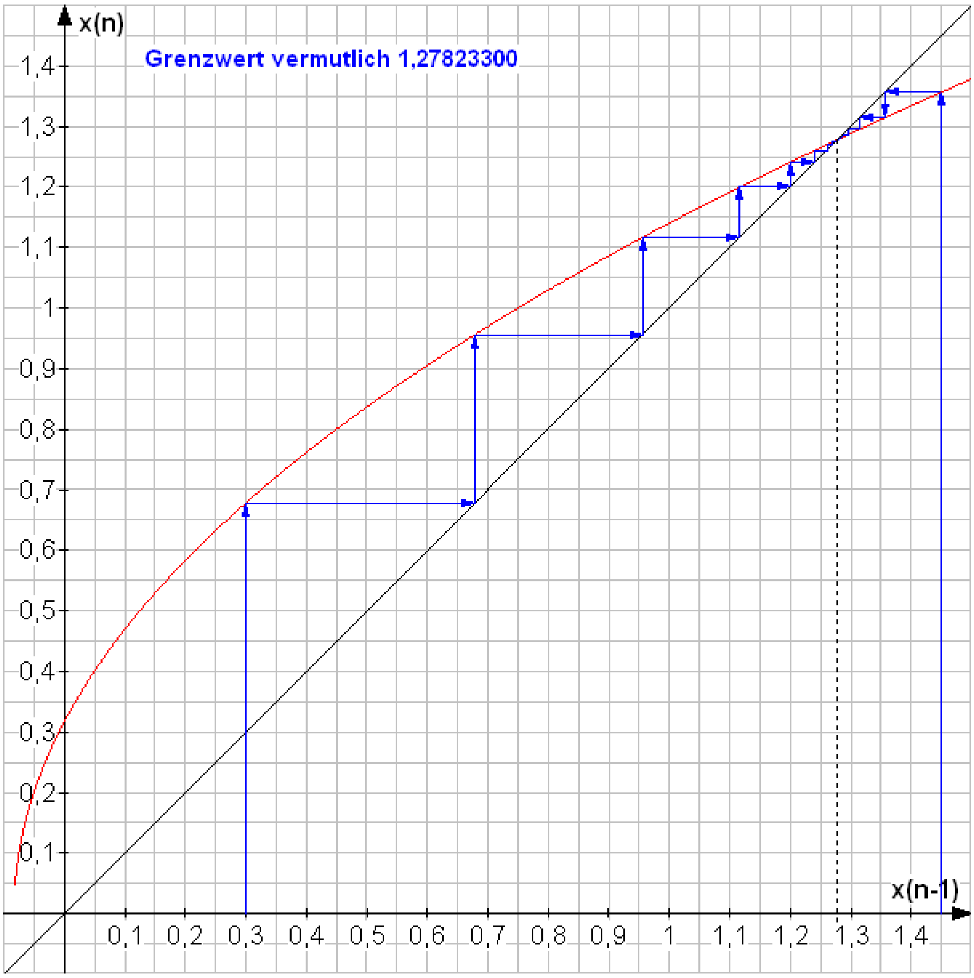
Es sei $f(x) = 1{,}45 - 1{,}4x$.
Der Graph von f muss zuerst so exakt wie möglich eingezeichnet werden.
Zeichne dann das Web-Diagramm und untersuche, ob ein Grenzwert G existiert.
Berechne den Grenzwert exakt, sofern er existiert .
Verwende den Startwert $x_o = 0{,}4$.



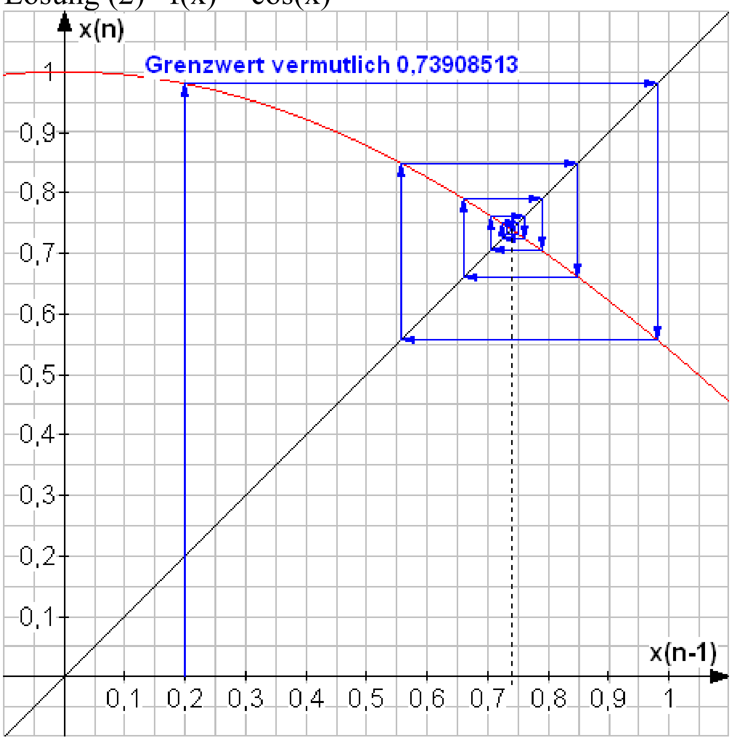
Rechnung:

Lösungen der Arbeitsblätter:

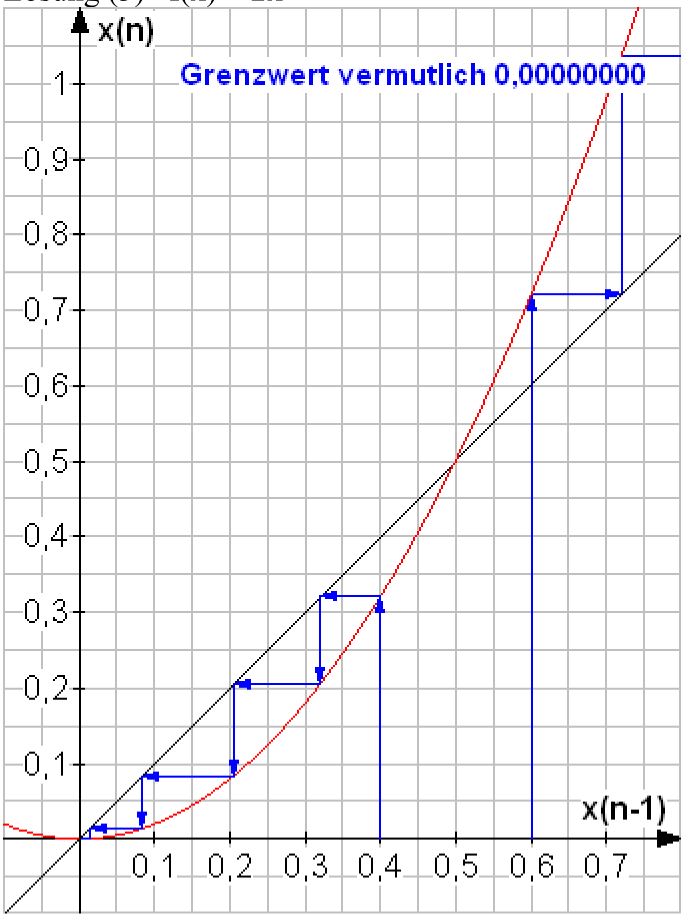
Lösung (1) $\quad f(x) = \sqrt{1{,}2x + 0{,}1}$



Lösung (2) $\quad f(x) = \cos(x)$

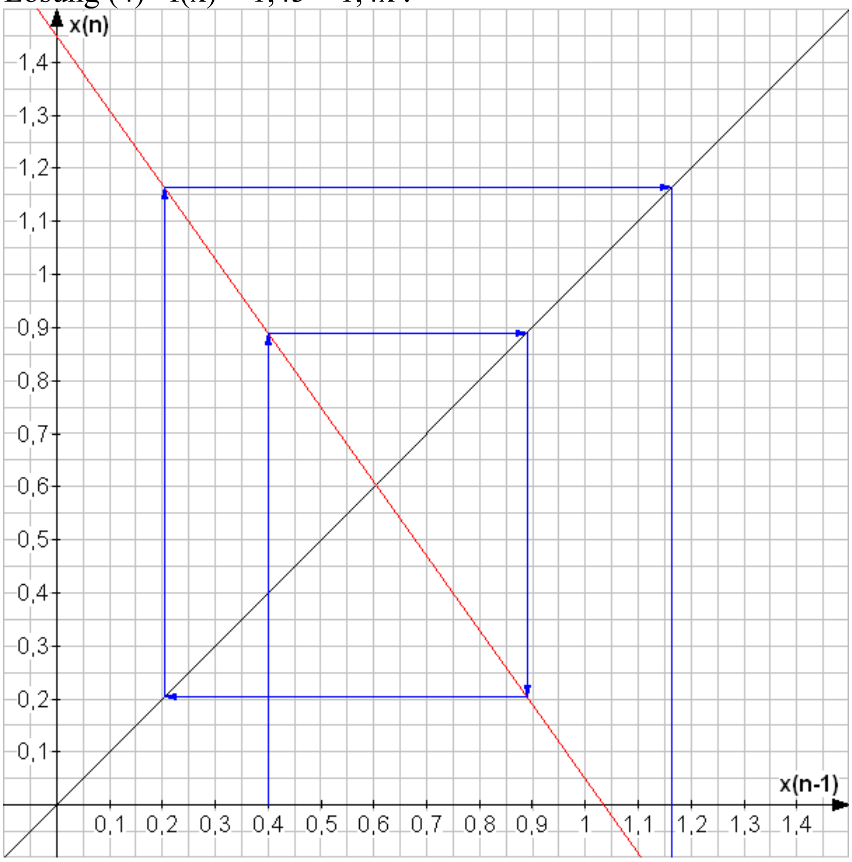


Lösung (3) $f(x) = 2x^2$



Man sieht, dass der Grenzwert bei bestimmten Startwerten nicht erkannt wird !

Lösung (4) $f(x) = 1{,}45 - 1{,}4x$.

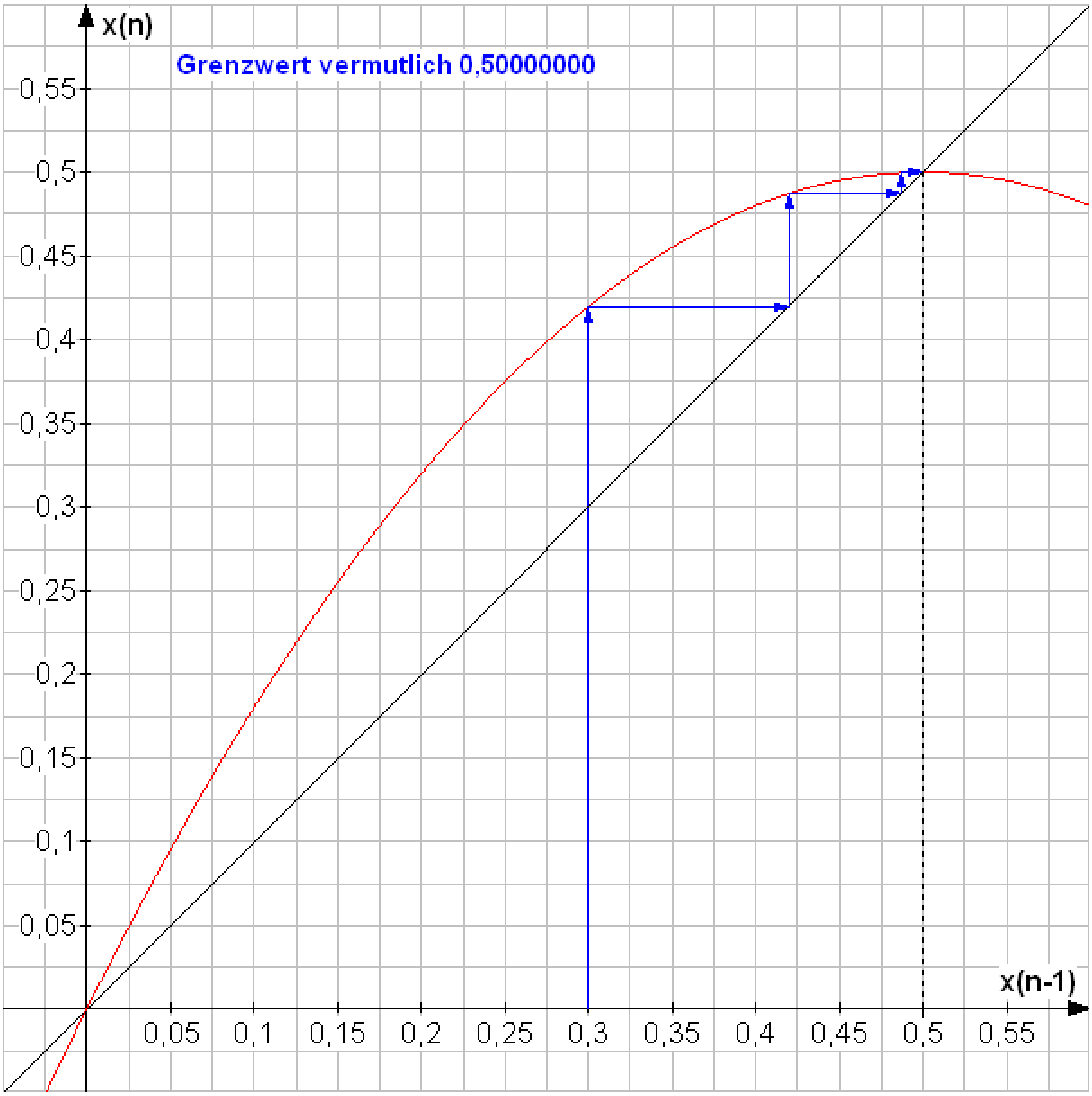


Weitere Beispiele für Web-Diagramme

1) Es sei $f(x) = 2x(1-x)$. Welche Funktionsklasse ist das ?
Zeichne das Web-Diagramm mit dem Startwert $x_o = 0,3$.
Kannst du einen Grenzwert erkennen ? Ggfs. Beweis

Lösung:

Es ist eine quadratische Funktion (Parabel)



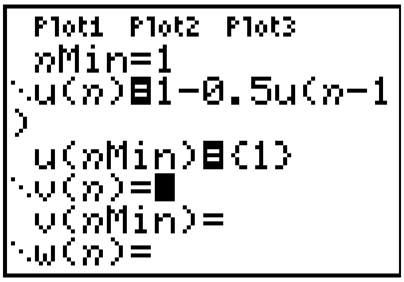
Grenzwert $g=0,5$

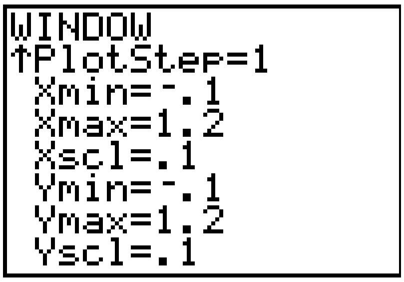
Beweis: $x=2x(1-x)$. Es folgen $x=0$ oder $x=0,5$ (nur 0,5 ist Grenzwert) .

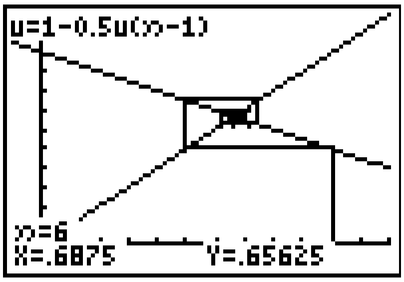
2) u(n) = 1 – 0,5u(n-1) mit u(1) = 1

Es handelt sich um die alternierende Reihe $u(n) = 1 - ½ + ¼ - 1/8 +- \ldots + (-0{,}5)^{n-1}$.
Die Glieder der Folge sind 1 0,5 0,75 0,625 0,6875 …..
Der Grenzwert ist g = 2/3, wie das folgende Web illustriert.

Y= GRAPH



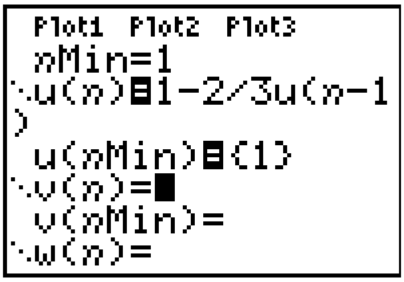


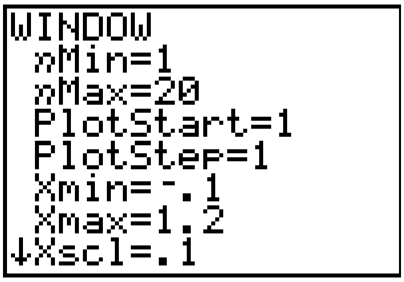


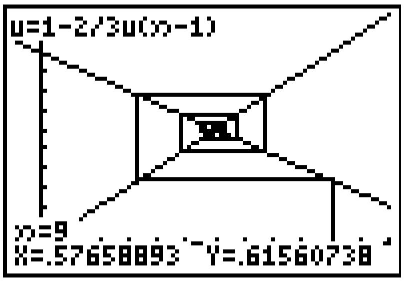
3) u(n) = 1 – 2/3u(n-1) mit u(1) = 1

Es handelt sich um die alternierende Reihe $u(n) = 1 - 2/3 + 4/9 - 8/27 +- \ldots + (-2/3)^{n-1}$.
Die Glieder der Folge sind 1 1/3 7/9 13/27 55/81 …..
Der Grenzwert ist g = 0,6 , wie das folgende Web illustriert.

Y= GRAPH

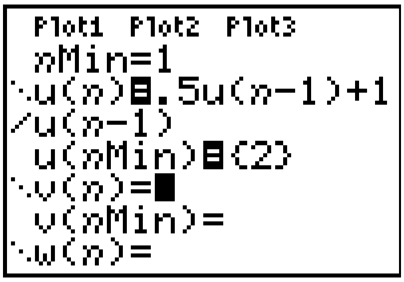


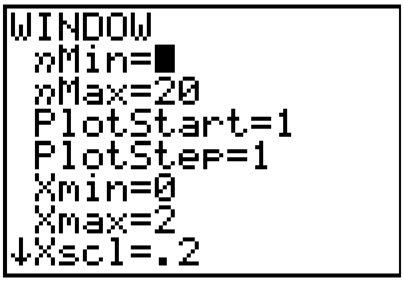


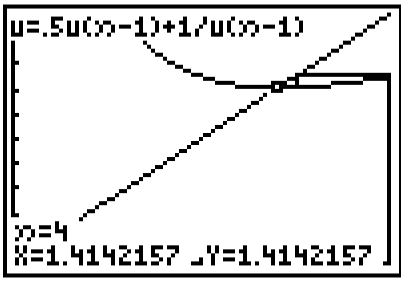


4) Viele weitere Beispiele ergeben sich aus dem „Allgemeinen Iterationsverfahren“ $x_n = g(x_{n-1})$
Z.B. Heron-Folge für √2 mit u(n) = 0,5[u(n-1) + 2/u(n-1)]

Y= GRAPH







5) Aus Wachstumsprozessen lassen sich viele Rekursionen ableiten, z.B.

Zinseszinsen mit p%=4,5% und Startkapital 800 : u(n)=1,045u(n-1) mit u(0)=800 .
explizit: $u(n)=800*1{,}045^n$

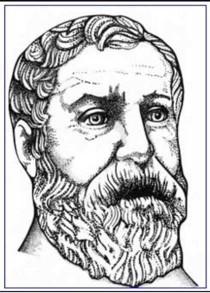
Beschränktes Wachstum in der Natur mit oberer Grenze G : u(n)=u(n-1)+0,25(300-u(n-1)) ; u(1)=2.
explizit: $u(n)=300-298*0{,}75^{n-1}$

Auch **logistisches Wachstum** ist möglich (siehe Schroedel-Buch Klasse 11).

Zur Approximation von **Quadratwurzeln** ($\sqrt{r}$) verwendet man das sog. Heronverfahren. r muss positiv sein und heißt Radikand !

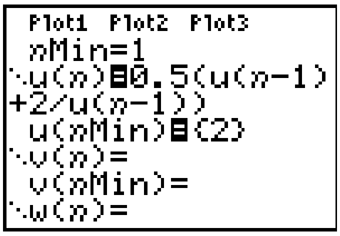
Rekursionsformel: $\boxed{x_n = 0{,}5 \cdot (x_{n-1} + \frac{r}{x_{n-1}})}$

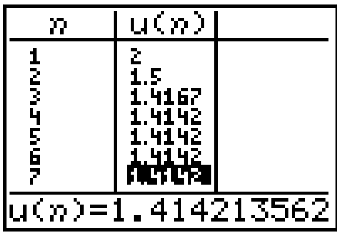
Startwert x_1 in der Nähe von $\sqrt{r}$ wählen, z.B. r.



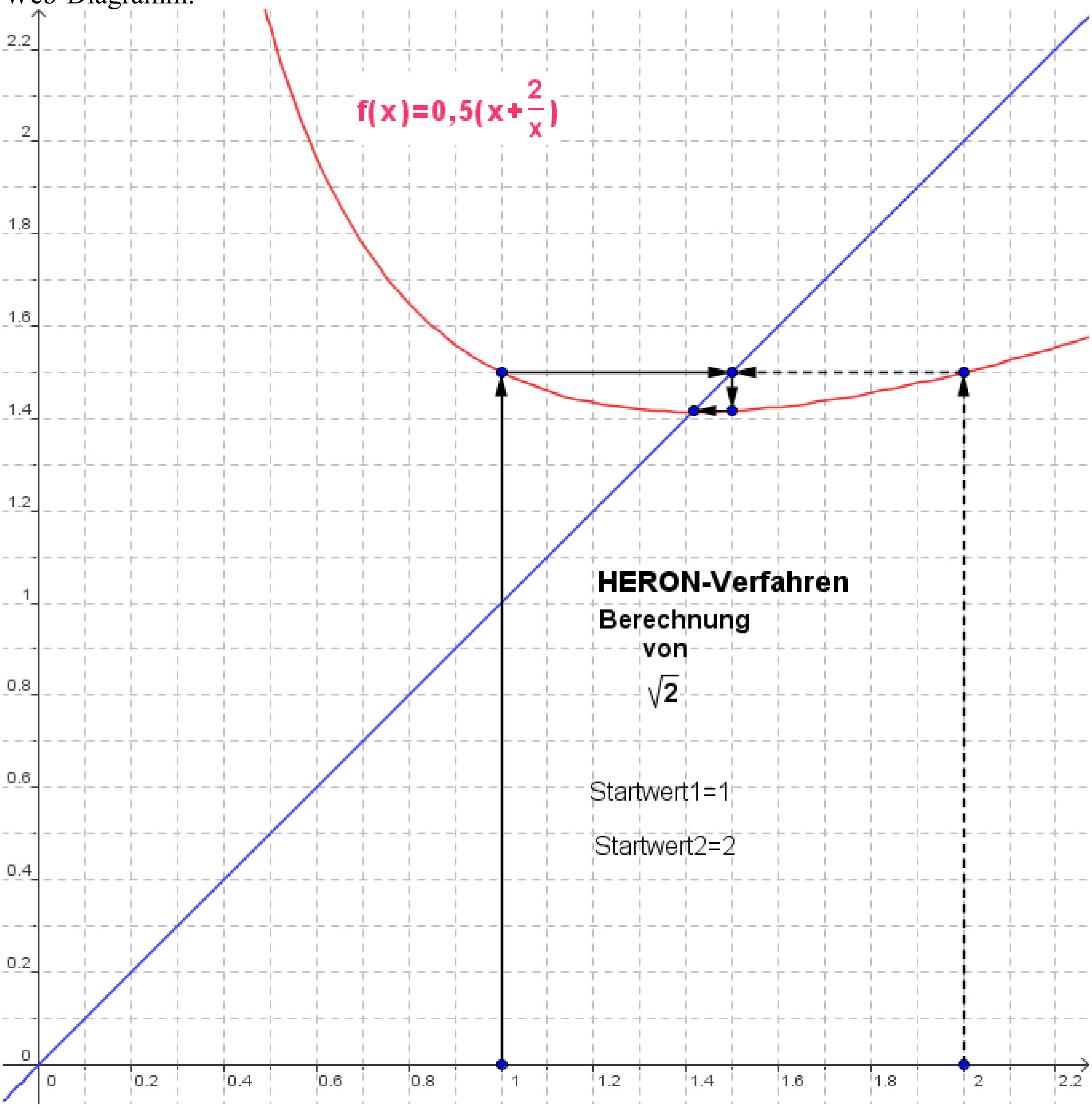
Beispiel:

Für r = 2 erhält man bereits bei u(5) eine Approximation von $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$. Beachte die sehr schnelle Konvergenz !





Web-Diagramm:



Erweiterung:

Will man beliebige Wurzeln berechnen ($\sqrt[k]{r}$) , so verwendet man die Heronformel:

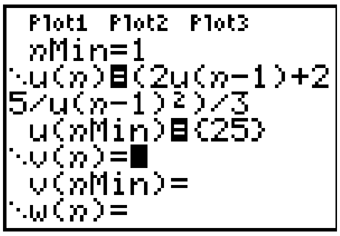
$$x_n = ((k-1)\cdot x_{n-1} + \frac{r}{(x_{n-1})^{k-1}})/k$$

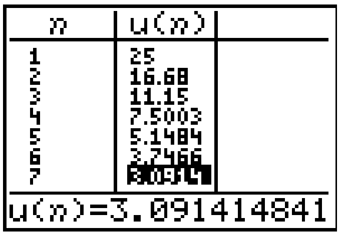
. Möglich ist auch

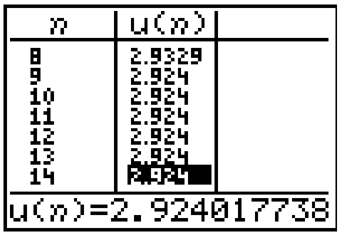
$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}{}^{k} - r}{k \cdot x_{n-1}{}^{k-1}}$$

Beispiel: Für k = 3 und r = 25 ($\sqrt[3]{25}$) ergibt sich die Formel

$$x_n = (2\cdot x_{n-1} + \frac{25}{(x_{n-1})^2})/3$$

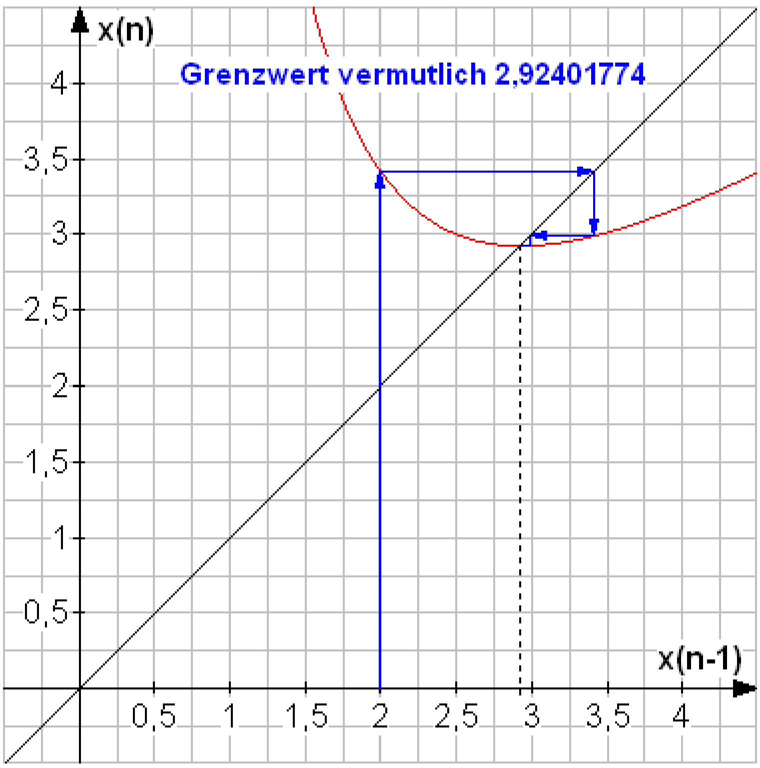






u(10) ist bereits bis auf 10 Stellen genau !

Hinweis: Die Näherung 2,924017738 kann überprüft werden durch Eingabe von 25^(1/3), was ja bekanntlich der 3.Wurzel von 25 entspricht !



Ausblick:

Das Heron-Verfahren ist ein Spezialfall des Newtonverfahrens $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$ und dieses wiederum ein Spezialfall des Allgemeinen Iterationsverfahrens $x_n = g(x_{n-1})$.