Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ac

<u>Definition:</u> **Die Wahrscheinlichkeit P (E) für ein bestimmtes Ereignis E ist so definiert :**

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ für\ E\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse}$$

P (E) ist stets eine Zahl zwischen 0 (unmögliches Ereignis) und 1 (sicheres Ereignis) .

<u>Beispiel:</u> Beim Werfen eines Würfels soll folgendes Ereignis E betrachtet werden:
E = { „1 oder 6“ }, d.h. nur die Zahlen 1 bzw. 6 sind günstig !
Es gibt 6 mögliche Ergebnisse beim Werfen eines Würfels. Für E sind 2 davon günstig.
Also ist P (E) = 2/6 = 1/3 .

Das Empirische Gesetz der großen Zahlen:

Bei der n-maligen Durchführung eines <u>Zufallsexperiments</u> ergibt sich für das Eintreten eines beliebigen <u>Ereignisses E</u> die relative Häufigkeit h (E). Mit wachsender Zahl n stellt sich für die h (E) - Werte eine <u>Stabilisierung</u> ein, die man als <u>"empirische Wahrscheinlichkeit P (E)"</u> interpretiert !

<u>Anm.:</u> Die n-malige Durchführung eines Zufallsexperimentes ist z.B. das 1200-fache Werfen eines Würfels. Man wird erwarten, daß hierbei jede Augenzahl <u>etwa</u> 200-mal auftritt (es kann mehr oder weniger starke Abweichungen von 200 geben !). Die relative Häufigkeit für das jeweilige Ergebnis ist dann näherungsweise h ≈ 200 / 1200 = 1/6 . Beim 10 000 - fachen Werfen eines Würfels wird sich die relative Häufigkeit kaum noch von 1/6 unterscheiden. h pendelt sich also bei 1/6 ein .
Es ist üblich, die rel. Häufigk. h gegen die Anzahl n in einem Diagramm aufzutragen (siehe Aufgabe weiter unten).

Beispiele für Zufallsexperimente:

Werfen eines Würfels: Hierbei sind alle <u>Ergebnisse</u> gleichwahrscheinlich, also gleich 1/6 .
Die Ergebnisse (= <u>Elementar</u>ereignisse) sind hier die Augenzahlen 1, 2,..., 6.

Ein beliebiges <u>Ereignis</u> setzt sich aus mehreren Ergebnissen zusammen,
z.B. E = {„alle geraden Augenzahlen“} = { 2, 4, 6 }. Es gilt P(E) = 0,5 .

Werfen eines Doppelwürfels: Es gibt 36 gleichwahrscheinliche Ergebnisse, nämlich
(1,1) , (1,2), ... , (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), (3,1), ... , (6,6).

Werfen eines Reißnagels: Die Wahrscheinlichkeiten für „Schräglage“ oder „Kopflage“ hängen von der Geometrie des Reißnagels ab, z. B. P ({„Schräglage“}) = 0,55 .

Roulette-Spiel: Es gibt hier 37 gleichwahrscheinliche Ergebnisse (Zahlen 0, 1, 2, ... , 36).
Die jeweilige Wahrscheinlichkeit beträgt also P = 1/37 .

Gegenwahrscheinlichkeit:

Bei manchen Ereignissen E ist es günstiger, die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe ihres <u>Gegenereignisses</u> zu berechnen. Es gilt dann:

$P(E) = 1 - P(\overline{E})$, *wobei* $\overline{E}$ *das Gegenereignis zu E ist .*

Computersimulation von Zufallsversuchen:

Oftmals möchte man Zufallsversuche nicht in der Realität durchführen, weil sie beispielsweise zu aufwendig oder zu teuer sind. Als Ersatz verwendet man dann eine Computersimulation, welche sich den in Computern eingebauten „Zufallsgenerator“ zunutze macht. Zum Beispiel hat der „Kleincomputer“ TI83 im MATH-Menü unter PRB einen Befehl namens ***randInt*** eingebaut, der **ganzzahlige** Zufallszahlen generiert.

Beispiel: randInt(1,6) liefert eine ganzzahlige Zufallszahl im Intervall [1;6] . Somit wirkt randInt(1,6) wie ein Würfel ! Man kann sogar gleichzeitig mehrere Zufallszahlen auf dem Bildschirm ausgeben lassen. Dazu gibt man einen 3. Platzhalter an. Z.B. randInt(1,37,250) liefert 250 Zahlen im Intervall [1;37] . (Roulette)

Aufgabe: Führe eine Simulation mittels randInt durch für das Ereignis E = {3} beim 90-fachen Werfen eines Würfels. Notiere für jeden Wurf die absoluten Häufigkeiten H und die rel.Häuf. h (Tabelle anlegen und Diagramm mit n auf der Rechtsachse und h auf der Hochachse zeichnen !). (Lösung weiter unten)

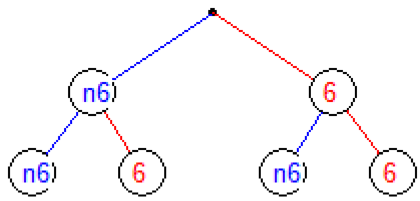
LAPLACE – Experimente (gleiche Wahrsch.):

Zufallsexperimente mit p Ergebnissen , bei denen alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind , heißen **LAPLACE-Experimente** (Beispiele: Münzwurf , Werfen eines Würfels) .
Für jedes Elementarereignis E_j gilt dann: $P(E_j) = \frac{1}{p}$ (gleich wahrscheinliche Ereignisse)

Gegenbeispiele:
- Bei einem „gezinkten“ Würfel sind nicht alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, sondern zumindest eine der Zahlen kommt häufiger vor als die anderen .
- Werfen eines Reißnagels : E1 = { Kopflage } E2 = { Schräglage } kommen unterschiedlich oft vor.
- Wird aus einer „Urne“ mit 7 roten und 3 blauen Kugeln eine Kugel gezogen, so sind die Ereignisse E1 = { Ziehen einer roten Kugel } und E2 = { Ziehen einer blauen Kugel } nicht gleich wahrscheinlich .

n-stufige Zufallsversuche (Baumdiagramme)

Besteht ein Zufallsversuch aus mehreren Schritten (2-maliges Werfen eines Würfels, 5-maliges Ziehen einer Kugel, 4-maliges Werfen eines Reißnagels , usw.) , so spricht man von einem n-stufigen Zufallsversuch .
Als Schema zur Veranschaulichung solcher Zufallsversuche dient das Baumdiagramm .
Die Ergebnisse schreibt man an die Äste des Baumes, wobei jede weitere Verzweigung einer neuen Stufe entspricht. Für das 2-malige Werfen eines Würfels mit den Ereignissen E1={„6“} und E2={„nicht 6“}={„n6“} sieht das so aus :



Beim Baumdiagramm gelten folgende Regeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

Pfadmultiplikationsregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (eines Pfades im Baumdiagramm) ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.

Pfadadditionsregel: Setzt sich ein Ereignis aus mehreren Pfaden (im Baumdiagramm) zusammen, so erhält man die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses durch Addition der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten .

Aufgabe zum Baumdiagramm:
Welche 4 Pfadwahrscheinlichkeiten erhält man bei obigem Baumdiagramm ?
Berechne die Wahrscheinlichkeiten P1 ({ „mindestens einmal 6“ }) sowie P2 ({ „genau 2-mal 6“ }) .

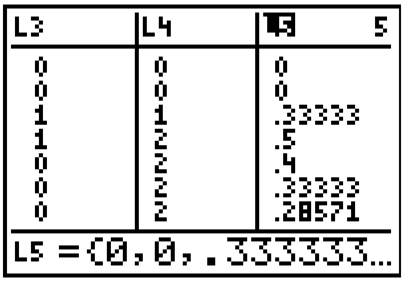
Lösungen der Aufgaben:

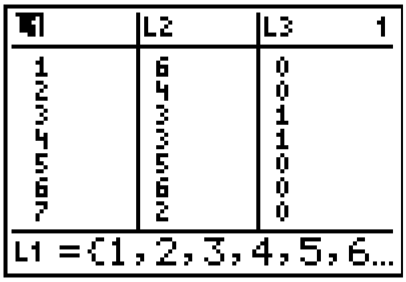
1) 500-faches Werfen eines Würfels und Zählen der 3-en für je 25 Würfe .

Mit dem TI83 lösen wir das Problem wie folgt:
Im Hauptbildschirm werden folgende Befehle eingegeben, um 4 Listen zu erzeugen:

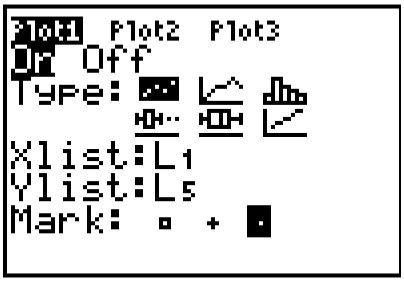
seq(X,X,1,90) STO L1	erzeugt die Zahlen 1;2;3:4; … ;90
randInt(1,6,90) STO L2	erzeugt 90 Zufallszahlen zwischen 1 und 6
L2=3 STO L3	setzt eine 1, falls eine 3 gewürfelt wurde, sonst 0
cumsum(L3) STO L4	summiert die Anzahl der gewürfelten 3en
L4/L1 STO L5	ermittelt die relativen Häufigkeiten der summierten (kumulierten) Häufigkeiten der Liste L4

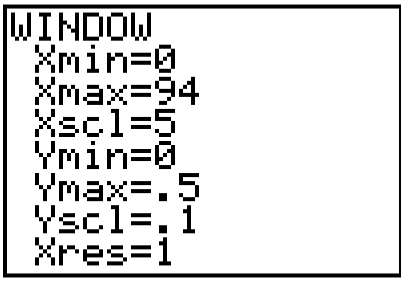
Sieht man nun in der Liste L5 nach, so findet man dort Zahlen zwischen 0 und 1 (rel. Häufigk.), während sich in L1 die Nummern 1 bis 90 befinden. Die Zahlen in L5 können von den hier gezeigten abweichen. Warum ??

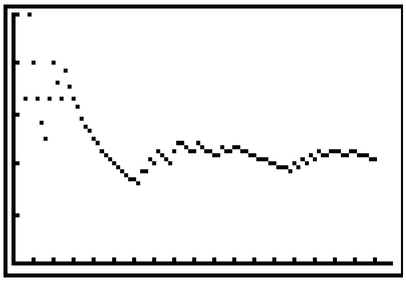




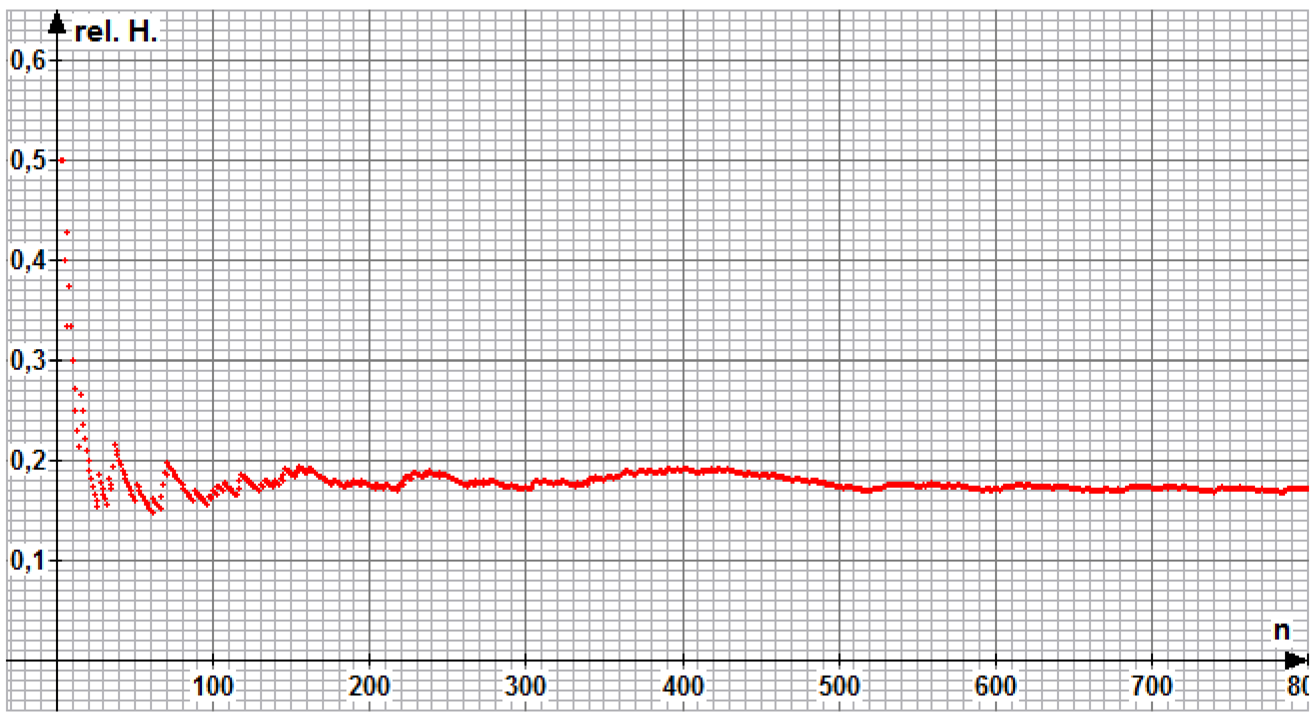
Es wird nun noch die Liste L5 (rel.H. h) in Abhängigkeit der Liste L1 (Anzahl n der Würfe) mittels STATPLOT grafisch dargestellt, so dass man eine Stabilisierung in der Nähe von h=0,17 vermuten kann .



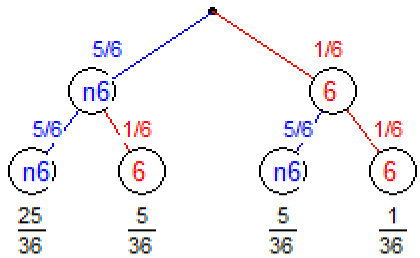




Zum Vergleich eine Computersimulation mit n = 800:



2) Baumdiagramm .



Im Baumdiagramm steht an jeder „6" die Einzelwahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ und an jeder „nicht 6" die E.w. $\frac{5}{6}$.
Wendet man die Pfadmultiplikationsregel an, so ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

P({6;6}) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

P({6;nicht 6}) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

P({nicht 6;6}) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

P({nicht 6;nicht 6}) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

Achtung:

Alle 4 Einzelwahrsch. müssen zusammen 1 ergeben !

Außerdem gelten:

P({„mindestens einmal 6}) = $\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$ nach der Pfadadditionsregel

P({„genau 2-mal 6}) = $\frac{1}{36}$