Überblick Hypothesentests bei Binomialverteilungen (Ac)

Beim Testen will man mit einer Stichprobe vom Umfang n eine Hypothese H_o (z.B.p_o=70%) widerlegen ! Man geht dabei aus von einer Binomialverteilung $B_{n;po}$ (k=0;1; … ;n) .
Das Signifikanzniveau (Verwerfungsbereich V der Nullhypothese) wird entweder mit α (meist $\alpha \le 5\%$) oder aber mit einer Schranke k (V={0; … ;k} bzw. V= {k; … ;n}) festgelegt .
V ist ein Bereich in der Binomialverteilung $B_{n;po}$ (entweder links oder rechts oder beidseitig).

1) Alternativtest:
(Null)Hypothese H_o: $p=p_o$ Alternative (Gegenhypothese) H_1: $p=p_1$

Man hat also hier 2 feste Verteilungen, die miteinander verglichen werden.

Im Gegensatz dazu hat man bei den folgenden 3 Testarten mehrere (meist unendlich viele) Verteilungen, die mit der H_o–Verteilung verglichen werden.

2) Zweiseitiger Test:
(Null)Hypothese H_o: $p=p_o$ Alternative (Gegenhypothese) H_1: $p\neq p_o$

3) Rechtsseitiger Test:
(Null)Hypothese H_o: $p\le p_o$ Alternative (Gegenhypothese) H_1: $p>p_o$

4) Linksseitiger Test:
(Null)Hypothese H_o: $p\ge p_o$ Alternative (Gegenhypothese) H_1: $p<p_o$

5) Fehler beim Testen:
<u>α-Fehler (oder Fehler 1.Art):</u>
Die Nullhypothese ist wahr, aber das Stichprobenergebnis liegt im Verwerfungsbereich V der Nullhypothese. H_o wird also irrtümlich verworfen !
<u>β-Fehler (oder Fehler 2.Art):</u>
Die Nullhypothese ist falsch, aber das Stichprobenergebnis liegt im Annahmebereich A der Nullhypothese. H_o wird also irrtümlich beibehalten !

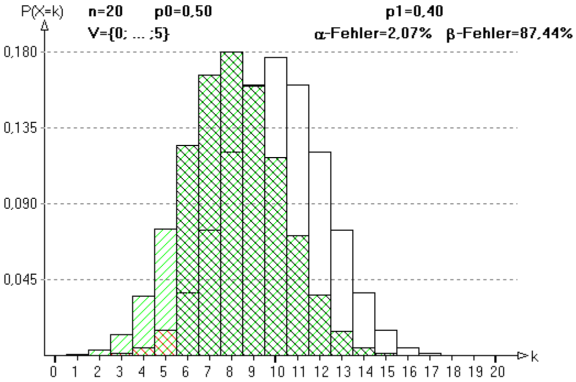
Der β-Fehler kann nur dann bestimmt werden, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit p_1 bekannt ist.
Es gilt dann $\beta=Pp_1(A)$.

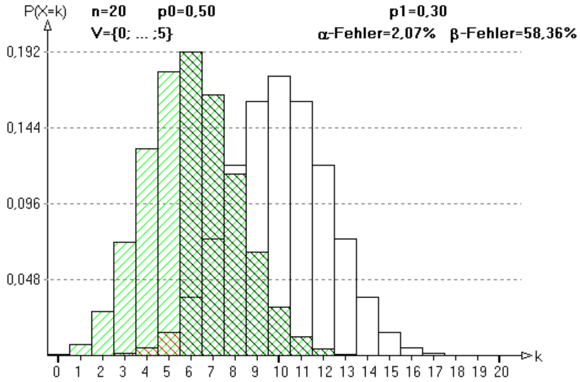
<u>Achtung:</u> Wählt man α kleiner, so wird zwangsläufig β größer (und umgekehrt).
Durch Erhöhung des Stichprobenumfangs n lässt sich β (sowie α) verkleinern.

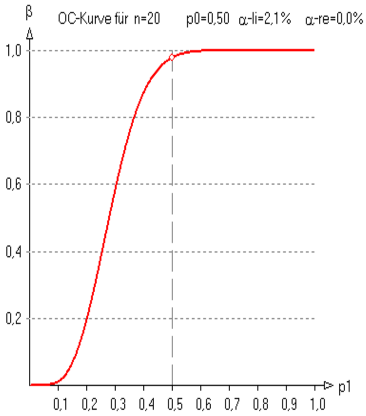
6) Operationscharakteristik (OC) des Tests:
Ermittelt man für alle möglichen Erfolgswahrscheinlichkeiten p_1 aus [0;1] bei gegebenem α den jeweiligen β-Fehler , so nennt man die Funktion $\beta(p_1)$ die OC .
(Für $p_1=p_o$ macht aber der β-Fehler keinen Sinn, so dass man diesen Wert weglassen muss !)

Beispiel für einen linksseitigen Test: $n=20$ H_o: $p\geq0,5$ H_1: $p<0,5$ $\alpha\leq0,05=5\%$

Die „Grenzwahrscheinlichkeit“ p=0,5 wird hier beispielhaft mit p=0,4 und p=0,3 verglichen:







p1	Beta (p1)
0,02	0,0000
0,04	0,0001
0,06	0,0009
0,08	0,0038
0,10	0,0113
0,12	0,0260
0,14	0,0507
0,16	0,0870
0,18	0,1356
0,20	0,1958
0,22	0,2657
0,24	0,3427
0,26	0,4235
0,28	0,5048
0,30	0,5836
0,32	0,6574
0,34	0,7242
0,36	0,7829
0,38	0,8329
0,40	0,8744
0,42	0,9078

p1	Beta (p1)
0,44	0,9340
0,46	0,9539
0,48	0,9687
0,50	0,9793
0,52	0,9867
0,54	0,9917
0,56	0,9950
0,58	0,9971
0,60	0,9984
0,62	0,9991
0,64	0,9996
0,66	0,9998
0,68	0,9999
0,70	1,0000
0,72	1,0000
0,74	1,0000
0,76	1,0000
0,78	1,0000
0,80	1,0000
0,82	1,0000
0,84	1,0000

Die OC-Kurve zeigt, dass der β-Fehler umso kleiner wird, je kleiner die Wahrscheinlichkeit der Vergleichshypothese H_1 ist.

Entscheidungsregel: Lehne H_o ab, wenn das Stichprobenergebnis in $V = \{0 ; \ldots ; 5\}$ liegt !
(Entsprechend liegt beim rechtsseitigen Test der Verwerfungsbereich V ganz rechts !)

Fehler 1.Art (α-Fehler): Eine richtige Hypothese wird abgelehnt (verworfen). D.h.: das Stichprobenergebnis liegt im Ablehnungsbereich V (rot schraffiert), obwohl H_o richtig ist .
In obigem Beispiel gilt $\alpha = P_{0,5}(X\leq5) = 2,1\%$

Fehler 2.Art (β-Fehler): Eine falsche Hypothese wird nicht abgelehnt (beibehalten) .
d.h.: das Stichprobenergebnis liegt im Annahmebereich A, obwohl H_o falsch ist .
Um den β-Fehler berechnen zu können, muss die richtige Wahrscheinlichkeit p_1 bekannt sein.
In obigem Beispiel gilt für z.B. p_1=0,4 (die entsprechende Grafik oben ist grün schraffiert !):

$\beta = P_{0,4}(X>5) = 1- P_{0,4}(X\leq5) = 87,4\%$.

Dies kann man auch an der OC-Kurve näherungsweise ablesen .

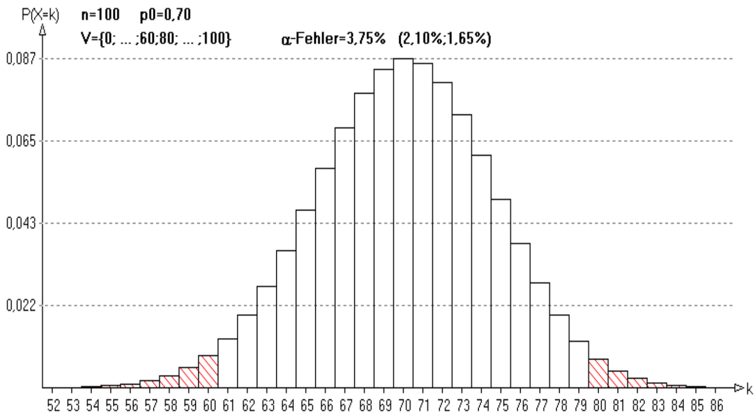
Ist übrigens p_1=0,3 die richtige Wahrscheinlichkeit, so ist $\beta = P_{0,3}(X>5) = 58,4\ \%$.

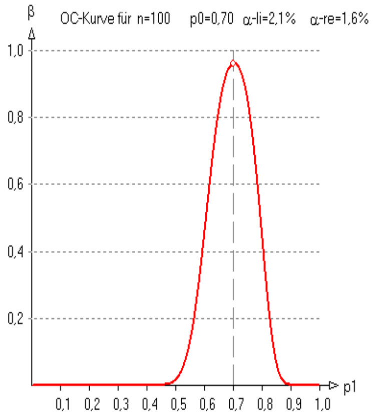
Die OC-Kurve gibt alle β-Fehler an .

Beispiel für einen zweiseitigen Test: $n=100$ H_o: $p=0{,}7$ H_1: $p\neq 0{,}7$ $\alpha \leq 0{,}05 = 5\%$

Hier muss das Signifikanzniveau in 2 Teile zu je 2,5% aufgespaltet werden.

k	P0(X=k)	P1(X=k)	P0(X<=k)	P1(X<=k)	P0(X>=k)
76	3,80%	0,00%	92,45%	100,00%	11,36%
77	2,77%	0,00%	95,21%	100,00%	7,55%
78	1,90%	0,00%	97,12%	100,00%	4,79%
79	1,24%	0,00%	98,35%	100,00%	2,88%
80	0,76%	0,00%	99,11%	100,00%	1,65%
81	0,44%	0,00%	99,55%	100,00%	0,89%
82	0,24%	0,00%	99,78%	100,00%	0,45%
83	0,12%	0,00%	99,90%	100,00%	0,22%
84	0,06%	0,00%	99,96%	100,00%	0,10%
85	0,02%	0,00%	99,98%	100,00%	0,04%
86	0,01%	0,00%	99,99%	100,00%	0,02%
87	0,00%	0,00%	100,00%	100,00%	0,01%
88	0,00%	0,00%	100,00%	100,00%	0,00%



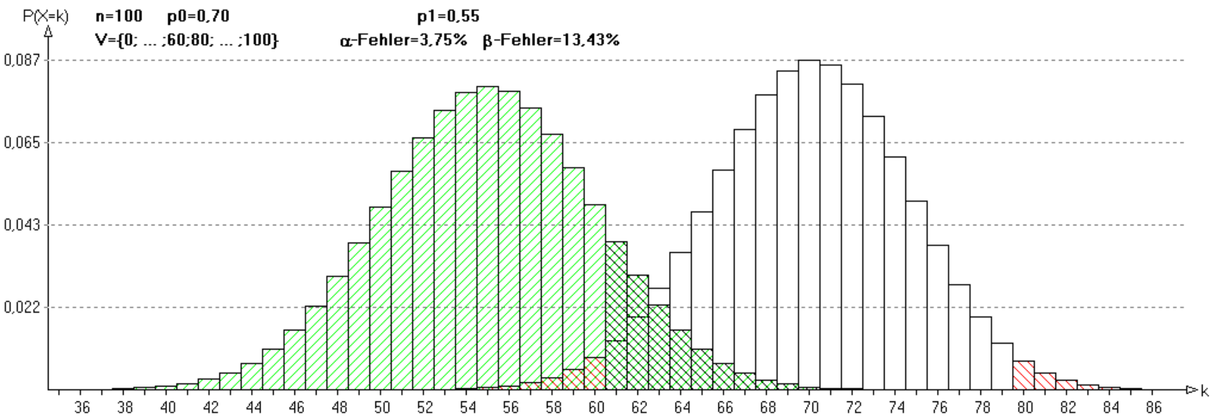


Die OC-Kurve zeigt, dass der β-Fehler umso kleiner wird, je mehr die Wahrscheinlichkeit der Vergleichshypothese sich von 0,7 entfernt.

Entscheidungsregel:
Lehne H_o ab, wenn das Stichprobenergebnis in $V=\{0 ; \ldots ; 60 ; 80 ; \ldots ; 100\}$ liegt !

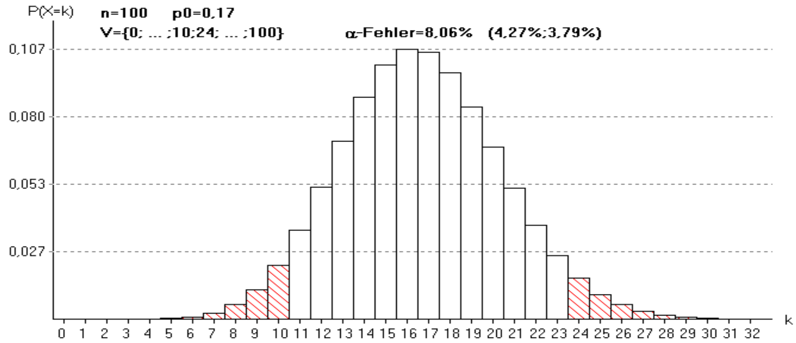
Fehler 1.Art (α-Fehler): Eine richtige Hypothese wird abgelehnt (verworfen).
$\alpha = P_{0,7}(V) = 3{,}75\%$

Fehler 2.Art (β-Fehler): Eine falsche Hypothese wird nicht abgelehnt (beibehalten) .
z.B. $p_1=0{,}55$ $\beta = P_{0,55}(61 \leq X \leq 79) = 13{,}4\%$ (siehe Grafik)

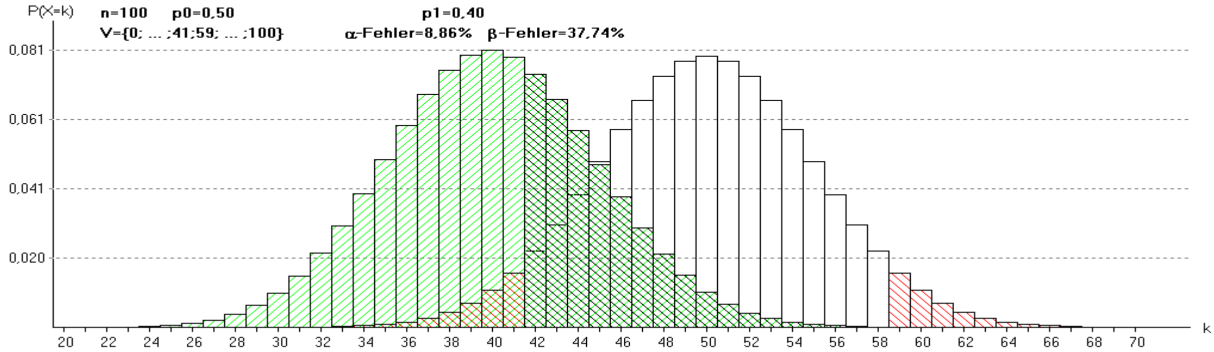


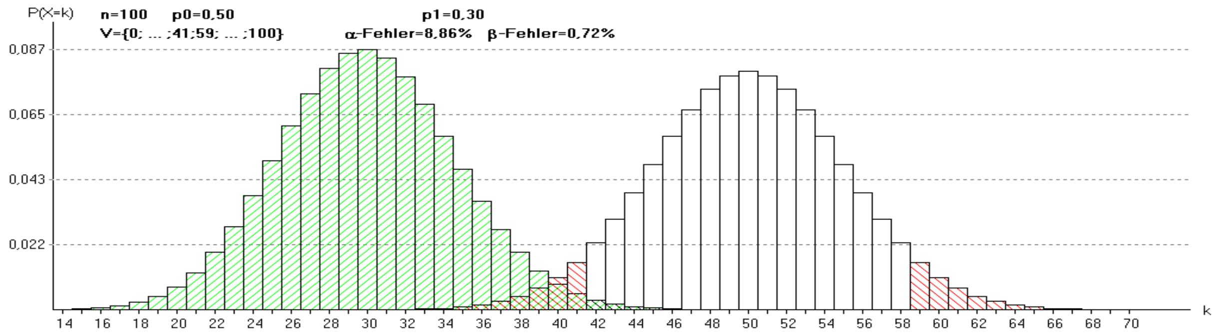
Weitere Beispiele (zweiseitiger Test):

Würfeltest   S/516   Aufg.1)   n=100 H_o: $p=\frac{1}{6}$ H_1: $p\neq\frac{1}{6}$ $\alpha\leq=10\%$

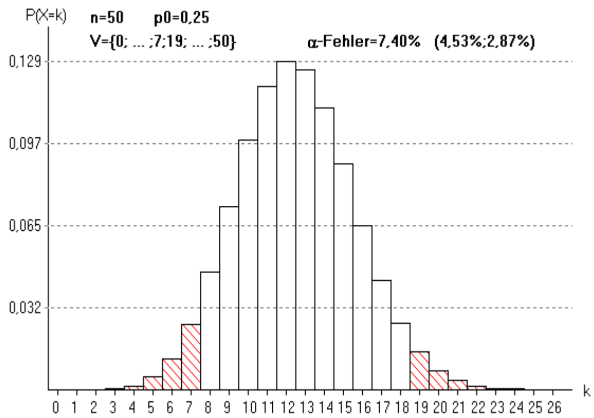


Münzwurf   S/517   Aufg.3)   n=100 H_o: $p=0{,}5$ H_1: $p\neq0{,}5$ $\alpha\leq=10\%$





Seite 517 Aufg.4)



Seite 517 Aufg.5)   n=50 H_o: $p=0{,}75$ (rote Erbsen) H_1: $p\neq0{,}75$ $\alpha\leq=10\%$

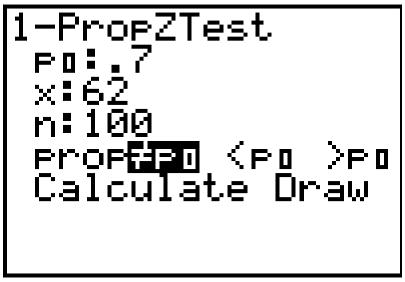
V = {0;…;31;43;…;50}   Liegt die Anzahl in V, so wird „Mendel“ nicht akzeptiert

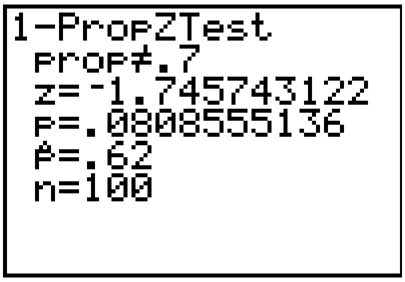
Tests durchführen mit dem TEST-Menü des TI83

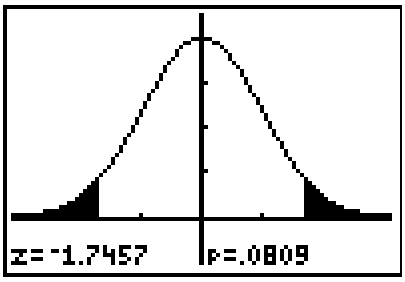
Man wählt dazu **STAT TESTS 5:1-PropZTest**

Vorsicht:
Um die Ergebnisse und vor allem die Grafik verstehen zu können, sind Kenntnisse der Normalverteilung erforderlich !

Beispiel: n=100 H_0: p=0,7 H_1: p≠0,7 x=62 (zweiseitiger Test)







Interpretation der Ergebnisse :

p=.08085... ist der sog. α-Fehler, d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Summe der beiden Bereiche links von x=62 (z=-1,7457) und rechts von x=78 (z=+1,7457) .
Es besteht hier eine Symmetrie zum Erwartungswert μ=70 !

Genauere Analyse für Fortgeschrittene:
Der TI83 arbeitet hier mit der Normalverteilung als Approximation der Binomialverteilung.

Im Beispiel ist μ=70 und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$

Somit gilt für die Normalverteilung $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0{,}5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{21 \cdot 2\pi}} e^{-0{,}5\left(\frac{x-70}{\sqrt{21}}\right)^2}$

Setzt man x=62 ein, so erhält man den z-Wert (Standardnormalverteilung) $z = \frac{8-70}{\sqrt{21}} \approx -1{,}7457$.

Dies deckt sich mit der obigen Grafik. x=62 entspricht ca. z=-1,7457 .

Die Wahrscheinlichkeit im Bereich]-∞ ; -1,7457] (schraffierter Bereich in der Grafik links)

beträgt dann $\phi(-1{,}7457) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-1{,}7457} e^{-0{,}5x^2}\,dx \approx 0{,}0404$

Multipliziert man mit 2 (beide schraffierten Flächen berücksichtigen), so ergibt sich der Wahrscheinlichkeitswert p = 0,0808 ≈ 8,1%. Dies deckt sich mit dem Ergebnis des TI83 .

Zum Vergleich: Die Berechnung mit der Binomialverteilung liefert einen α-Fehler von 10,1% .