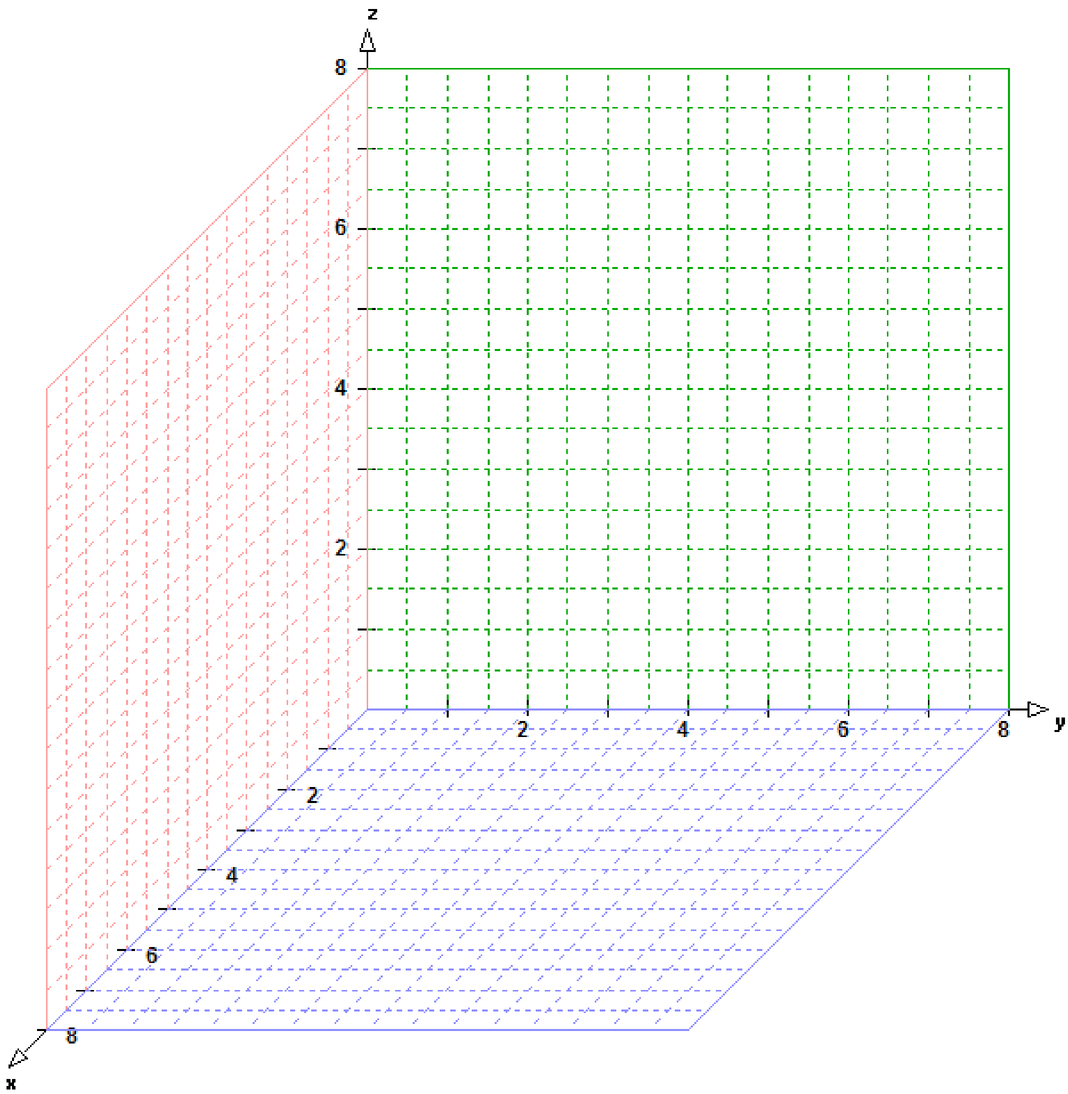
Koordinatenebenen zur Veranschaulichung von Objekten



1) Zeichne folgende Punkte incl. der Koordinatenzüge ein: A(5/2/4), B(2/5/6).
Zeichne die Verbindungsgerade g=(AB) incl. Stütz- und Richtungsvektor ein.
Berechne die Spurpunkte Sxz, Syz und zeichne sie ein.

2) Eine Gerade h soll parallel zu g und durch P(3/4/4) verlaufen. Ermittle ihre Gleichung sowie die Spurpunkte Sxz, Syz und zeichne P, h, Sxz, Syz ein.

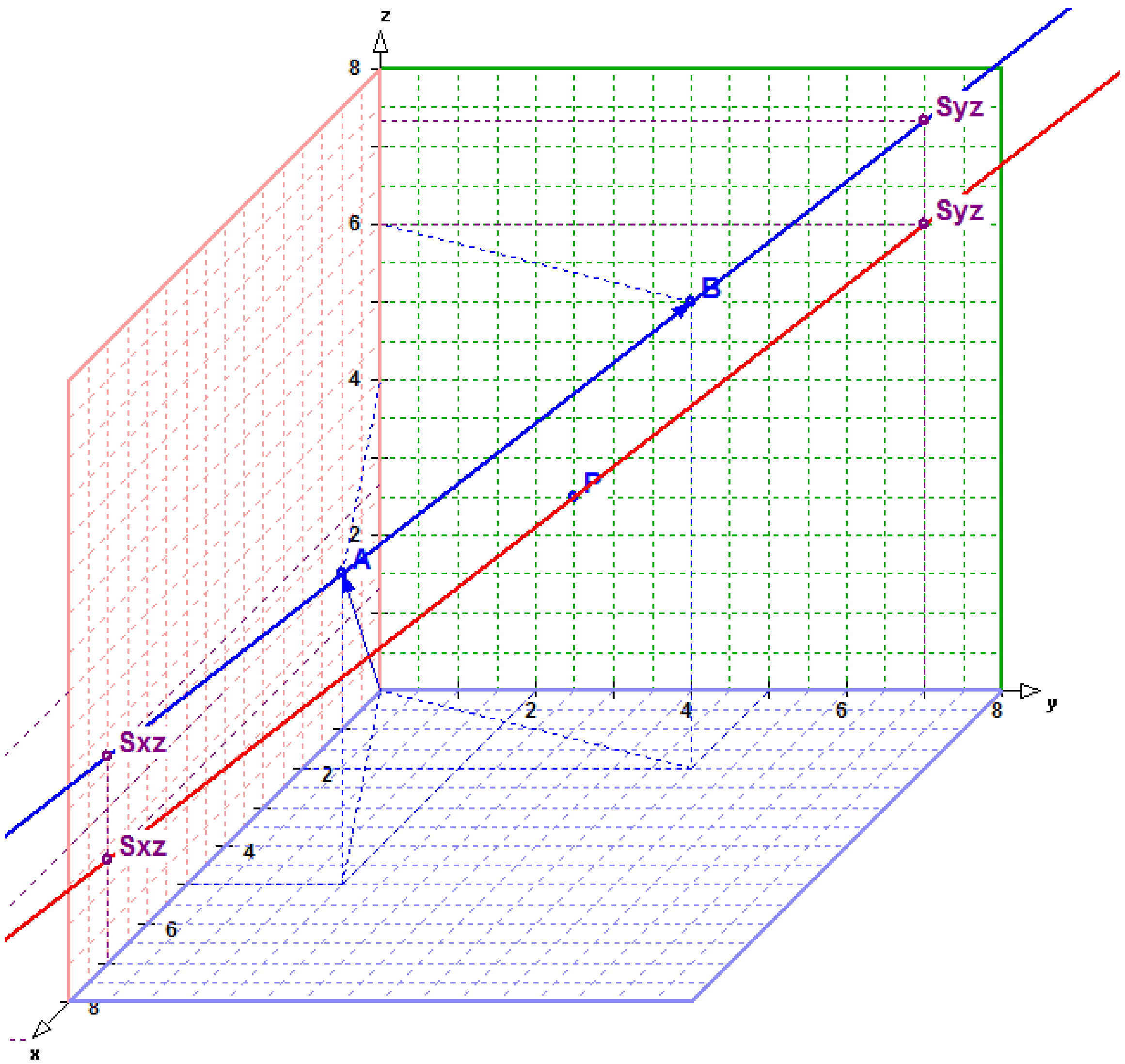
3) Eine Gerade i=(QR) mit Q(5/2/0), R(4/3/2) sei gegeben.
Zeichne Q und R ein und untersuche die Inzidenz von i und h.

4) Eine Gerade j sei gegeben durch ihre Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Inzidenz von j und h sowie von j und g.

Teil-Lösungen:



Zu 1) siehe Skizze $g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnung von Sxz bzgl. g:

$$\overrightarrow{OS_{xz}} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = 5 - 3\lambda \\ 0 = 2 + 3\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 5 - 3\lambda \\ -2 = 3\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 5 + 2 \\ -\frac{2}{3} = \lambda \\ z = 4 - \frac{4}{3} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} x = 7 \\ -\frac{2}{3} = \lambda \\ z = \frac{8}{3} \end{array} \right|$$

Für den Spurpunkt erhält man demnach $S_{xz}(7/0/2,\bar{6})$. Analog hierzu: $S_{yz}(0/7/7,\bar{3})$

Zu 2) $h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad S_{xz}(7/0/1,\bar{3}) \qquad S_{yz}(0/7/6)$

Zu 3)

$$i: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i und h sind <u>nicht parallel</u>, weil ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind ! $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Daher sind sie entweder windschief oder sie schneiden sich in einem Punkt.

Gleichsetzen der Vektorterme von g und i: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es folgt eine Vereinfachung und dann ein LGS:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} -\lambda + 3\mu = -2 \\ \lambda - 3\mu = 2 \\ 2\lambda - 2\mu = 4 \end{array} \right|$$

Dieses LGS wird mit dem Matrixmodul des TI84 gelöst:

$$\begin{array}{cc|c} \cdot\lambda & \cdot\mu & \cdot 1 \\ \hline -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{array}$$

Anwendung von rref (A) liefert:

$$\begin{array}{cc|c} \cdot\lambda & \cdot\mu & \cdot 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Also: λ=2 und μ=0 sowie 0=0
Die Lösung ist eindeutig, daher gibt es einen Schnittpunkt S.

Schnittpunkt S berechnen mithilfe des Terms der Geraden h:

$$\overline{OS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und somit S(3/4/4) .

Zu 4) Hier sind alle 3 Geraden g, h und j parallel zueinander.
Eine Überprüfung auf Gleichheit der Geraden ergibt, dass lediglich g = j gilt, jedoch h ≠ j !