Funktionen - Relationen - Ableitungen

Ac 2021-2024

1. Explizite Darstellung: y = f(x)

Ableitungen:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Es gelten u.a. folgende Regeln:

Summenregel: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Faktorregel: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x) \quad ; \; a \in \mathbb{R}$

Konstantenregel: $a' = 0 \quad ; \; a \in \mathbb{R}$

Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad ; \; n \in \mathbb{Z}^*$

Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$

Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x)$

2. Implizite Darstellung: F(x,y) = 0

Ableitungen ("Implizites Ableiten"):

$$F'(x,y) = \frac{dF(x,y)}{dx} \quad \text{und} \quad F''(x,y) = \frac{dF'(x)}{dx} = \frac{d^2F}{dx^2}$$

Beispiel Kreis: $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \; ; \; r = \text{Radius}$

$$F'(x,y) = 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

$$F''(x,y) = 2 + 2(y \cdot y'' + y' \cdot y') = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1+y'^2}{y}$$

3. Parameter-Darstellung: x = f(t) y = g(t) ; t ist der Parameter !

Ableitungen:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d\,\frac{y'(t)}{x'(t)}}{dx} = \frac{d\,\frac{y'(t)}{x'(t)}/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x'(t)^2}}{x'(t)} = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x'(t)^3}$$

Beispiel Kreis: $x(t) = r \cdot \cos(t) \quad y(t) = r \cdot \sin(t) \; ; \quad r = \text{Radius}$

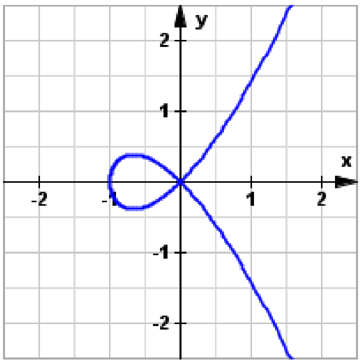
$$x'(t) = -r \cdot \sin(t) \qquad y'(t) = r \cdot \cos(t) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{r \cdot \cos(t)}{-r \cdot \sin(t)} = -\cot(t) = -\frac{x}{y}$$

$$x''(t) = -r \cdot \cos(t) \qquad y''(t) = -r \cdot \sin(t) \quad \Rightarrow$$

$$y''(x) = \frac{r^2 \cdot \sin^2(t) + r^2 \cdot \cos^2(t)}{-r^3 \cdot \sin^3(t)} = -\frac{1}{r \cdot \sin^3(t)} = -\frac{r^2}{y^3}$$

Weitere Beispiele:

Beispiel 1): $x = t^2-1$ $y = t\cdot(t^2-1)$; $-\pi \le t < \pi$ (Kurve mit Doppelpunkt (0;0))



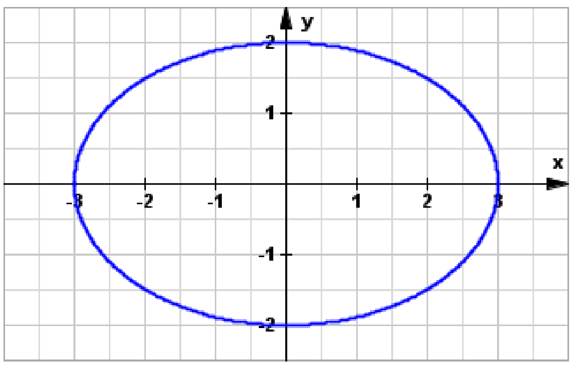
$x'(t) = 2t$ $y'(t) = 3t^2 - 1$; also ist $y'(x) = (3t^2 - 1) / (2t)$
$x''(t) = 2$ $y''(t) = 6t$; also ist $y''(x) = 3t$

Rel. Extrempunkte: Notwendig ist $y'(x) = 0$, d.h. $3t^2=1$ $t^2=1/3$ $x = -2/3$ $y = \pm\sqrt{(4/27)}$

Für $t = \sqrt{(1/3)}$ ist $y''(-2/3) = 3\sqrt{(1/3)} > 0$; hieraus folgt ein TP
Für $t = -\sqrt{(1/3)}$ ist $y''(-2/3) = -3\sqrt{(1/3)} < 0$; hieraus folgt ein HP

Rel. Extrempunkte sind also: HP$(-2/3 ; \sqrt{(4/27)})$ TP$(-2/3 ; -\sqrt{(4/27)})$

Beispiel 2): $x = 3\cdot\cos(t)$ $y = 2\cdot\sin(t)$; $-\pi \le t < \pi$ (Ellipse mit Halbachsen 3 und 2)

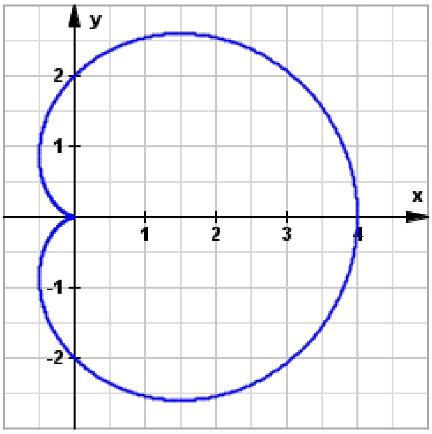


$x'(t) = - 3\sin(t)$ $y'(t) = 2\cos(t)$; also ist $y'(x) = -2/3\cdot\cot(t)$
$x''(t) = -3\cos(t)$ $y''(t) = -2\sin(t)$; also $y''(x) = [6\sin^2(t) + 6\cos^2(t)] / (-27\sin(t)^3) = -2 / 9 / \sin(t)^3$

Rel. Extrempunkte: Notw. ist $y'(x) = 0$, d.h. $\cos(t) = 0 \wedge \sin(t) \neq 0$
Lösungen: $t = \pm \pi/2$ $x = 0$ $y = \pm 2$
Für $t = \pi/2$ ist $y''(0) = -2/9 < 0$; hieraus folgt ein HP
Für $t = -\pi/2$ ist $y''(0) = 2/9 > 0$; hieraus folgt ein TP

Rel. Extrempunkte sind also: HP(0 ; 2) TP(0 ; -2)

Beispiel 3): $x = 2\cdot\cos(t)\cdot(1+\cos(t))$ $y = 2\cdot\sin(t)\cdot(1+\cos(t))$;
$x \in [-0,5;4]$, $|y| \leq \sqrt{(6,675)} \approx 2,598$ (Kardioide)



$x'(t) = -2\sin(t)\cdot(1+2\cos(t))$
$y'(t) = 2\cos(t)\cdot(1+\cos(t)) - 2\sin^2(t)$;

also ist $y'(x) = [-\cos(t)\cdot(1+\cos(t)) + \sin^2(t)] / [\sin(t)\cdot(1+2\cos(t))]$
bzw. $\mathbf{y'(x) = (1-\cos(t)-2\cos^2(t)) / \sin(t) / (1+2\cos(t))}$

$x''(t) = -2\sin(t)\cdot(-2\sin(t)) - 2\cos(t)\cdot(1+2\cos(t)) = 4\sin^2(t) - 2\cos(t) - 4\cos^2(t)$

$y''(t) = 2\cos(t)\cdot(-\sin(t)) - 2\sin(t)\cdot(1+\cos(t)) - 4\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) =$
$-2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) - 2\cdot\sin(t) - 2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) - 4\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) = -8\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) - 2\cdot\sin(t)$
$= -2\sin(t)\cdot(1 + 4\cdot\cos(t))$

also ist $\mathbf{y''(x) = -2\sin(t)\cdot(1 + 4\cdot\cos(t)) / (4\sin^2(t) - 2\cos(t) - 4\cos^2(t))}$

Rel. Extrempunkte: Notw. ist $y'(x) = 0$, d.h. $1-\cos(t)-2\cos^2(t) = 0 \wedge \sin(t) \neq 0 \wedge \cos(t) \neq -0,5$
Substitution $z=\cos(t)$ führt zu $z^2+0,5z-0,5=0$
Lösungen: $z=-1$ sowie $z=0,5$

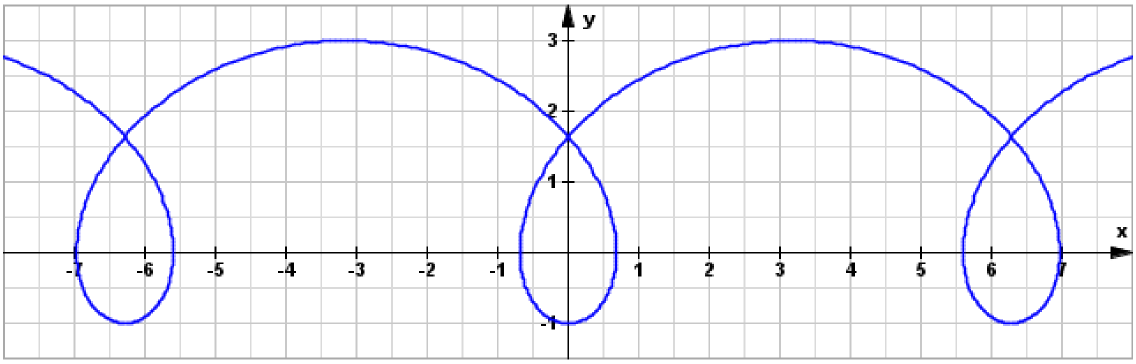
1. $\cos(t)=-1$ bzw. $x=0$ $y=0$ kann keine Lösung sein, weil $y'(x=0)$ nicht definiert ist (0/0 !)

2. $\cos(t)=0,5$ bzw: $x=1,5$ $y=\pm\sqrt{(6,675)} \approx 2,598$ <u>ist eine Lösung</u> !

Für $\cos(t)=0,5$ ist $\sin(t)=\pm\sqrt{(3)}/2$ und somit $y'' = \pm 3\sqrt{(3)} / 1 \neq 0$; Extremstelle !

Rel. Extrempunkte sind also: HP(1,5 ; $\sqrt{(6,675)}$) TP(1,5 ; $-\sqrt{(6,675)}$)

Beispiel 4): $x = t - 2\cdot\sin(t)$ $y = 1 - 2\cdot\cos(t)$; $t \in \mathbb{R}$ (Zykloide)



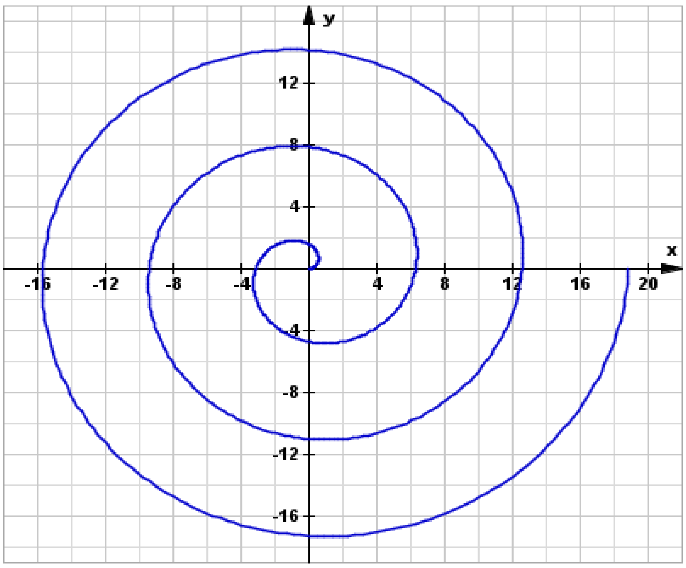
$x'(t) = 1 - 2\cos(t)$ $y'(t) = 2\sin(t)$; also ist $y'(x) = 2\sin(t) / (1 - 2\cos(t))$
$x''(t) = 2\sin(t)$ $y''(t) = 2\cos(t)$;
also ist $y''(x) = [2\cos(t)(1-2\cos(t)) - 4\sin^2(t)] / (1-2\cos(t))^3$

Rel. Extrempunkte: Notw. ist $y'(x) = 0$, d.h. $\sin(t) = 0 \wedge \cos(t) \neq 0{,}5$
Lösungen: $t = n\cdot\pi$ $x = n\cdot\pi$ $y = 1 - 2\cdot\cos(n\cdot\pi) = 1 \pm 2$

Für $t = n\cdot\pi$ ist $y''(n\cdot\pi) = 2\cos(n\cdot\pi)(1-2\cos(n\cdot\pi)) / (1-2\cos(n\cdot\pi))^3$
Für gerade n ist $\cos(n\cdot\pi) = 1 > 0$, für ungerade n ist $\cos(n\cdot\pi) = -1 < 0$

Rel. Extrempunkte sind also: HP($(2k+1)\cdot\pi$; 3) TP($2k\cdot\pi$; -1)

Beispiel 5): $x = t\cdot\cos(t)$ $y = t\cdot\sin(t)$; $0 \le t \le 6\pi$ (Archimedische Spirale)

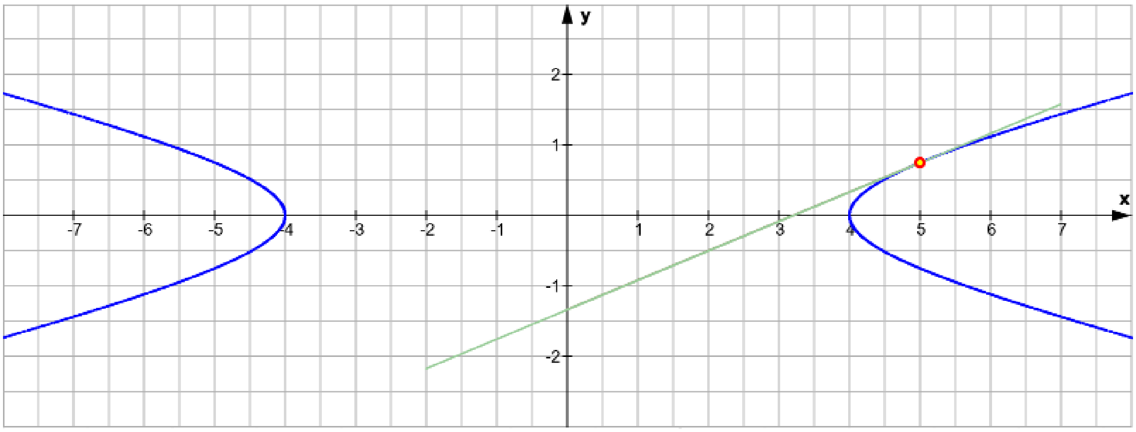


$x'(t) = -t\cdot\sin(t) + \cos(t)$ $y'(t) = t\cdot\cos(t) + \sin(t)$;
also ist $\mathbf{y'(x) = (t\cdot\cos(t) + \sin(t)) / (-t\cdot\sin(t) + \cos(t))}$
$x''(t) = -t\cdot\cos(t) - \sin(t) - \sin(t) = -(t\cdot\cos(t) + 2\sin(t))$
$y'(t) = -t\cdot\sin(t) + \cos(t) + \cos(t) = 2\cos(t) - t\cdot\sin(t)$
also ist $\mathbf{y''(x) = [t\cdot\sin(t) - 2\cos(t)] / (t\cdot\cos(t) + 2\sin(t))}$

Rel. Extrempunkte: Notw. ist $y'(x) = 0$, d.h. $t\cdot\cos(t) + \sin(t) = 0 \wedge \cos(t) \neq t\cdot\sin(t)$

Lösungen:	t = 0 ;	2,02875 ;	4,91318 ;	7,97866 ;	11,08554 ;	14,2074 ;	17,3364
	x = 0	-0,897	0,9799	-0,9922	0,996	-0,997	0,9987
HPs rot	y = 0	1,82	-4,81	7,92	-11,04	14,17	-17,31

Beispiel 6): $x^2 - 16y^2 - 16 = 0$; $x, y \in \mathbb{R}$ (Hyperbel)



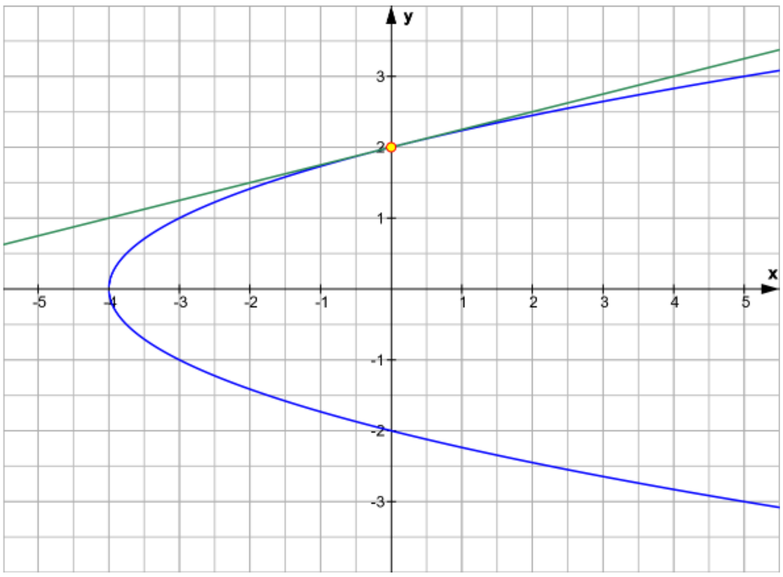
F '(x,y) = 2x / 16 - 2y·y' = 0 ; es folgt: **y ' = x / (16y)**

F ''(x,y) = 2 / 16 - 2y·y'' - 2y'·y' = 2 / 16 - 2y·y'' - 2y'² = 0 ; es folgt: **y '' = (1/16 - y' ²) / y**

Rel. Extremstellen: Notw. ist y' = 0 , also x = 0. Nicht möglich, also gibt es keine rel. Extrempunkte !

Tangentengleichung im Punkt P(5 ; 0,75) bestimmen :
Steigung m = y'(x=5) = 5 / (16y) = 5 / 12 ≈ 0,416
Tangentengleichung: y = m·x + b . Einsetzen: 0,75 = 5/12·5 + b , also b = -4/3
Daher ist die Tangentengleichung y = 5/12·x - 4/3

Beispiel 7): $y^2 - x - 4 = 0$; $x, y \in \mathbb{R}$ (Parabel)



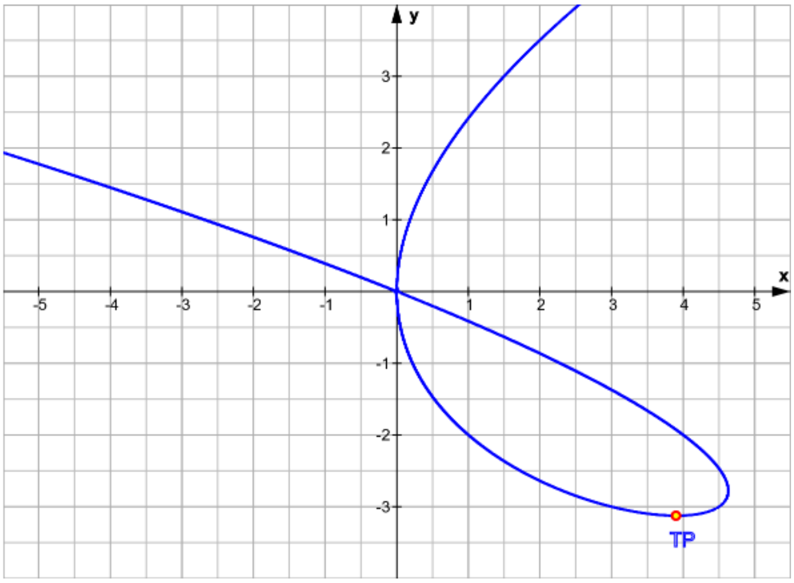
F '(x,y) = 2y·y' - 1 = 0 ; es folgt: **y ' = 1 / (2y)**

F ''(x,y) = 2y·y'' + 2y'·y' = 2y·y'' + 2y'² = 0 ; es folgt: **y '' = - y' ² / y**

Rel. Extremstellen: Notw. Bed. y' = 0 . Nicht möglich . also gibt es keine rel. Extrempunkte !

Tangentengleichung im Punkt P(0 ; 2) bestimmen :
Steigung m = y'(x=0) = 1 / (2y) = 1 / (2·2) = 0,25
Tangentengleichung: y = m·x + b
Der y-Achsenabschnitt b ist = 2 ; daher ist die Tangentengleichung y = 0,25·x + 2

Beispiel 8): $2x^2 + 5xy - y^3 = 0$; $x, y \in \mathbb{R}$ (Schleife; parabolisch)



F '(x,y) = $4x + 5y + 5xy' - 3y^2y' = 0$; es folgt: $\mathbf{y' = (4x + 5y) / (3y^2 - 5x)}$

F ''(x,y) = $4 + 5y' + 5y' + 5xy'' - 6yy'^2 - 3y^2y'' = 0$; es folgt: $\mathbf{y'' = (4 + 10y' - 6yy'^2) / (3y^2 - 5x)}$

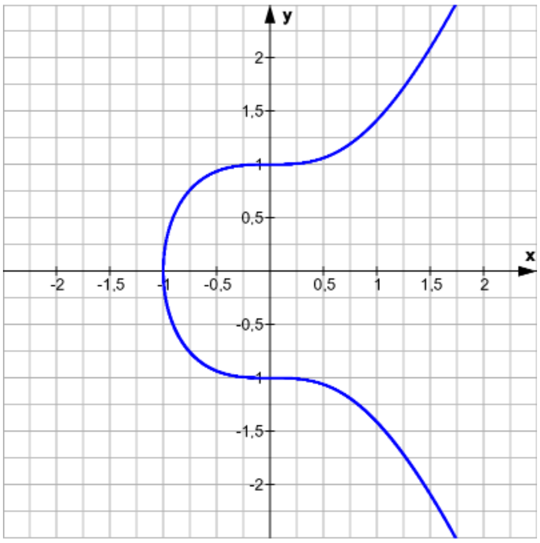
Rel. Extremstellen:
Notw. Bed. $y' = 0$. Es folgt: $-0{,}8x = y$, aber $3y^2 \neq 5x$;
Aus $-0{,}8x = y$ folgt aus der Ausgangsgleichung $2x^2 - 4x^2 + 64/125x^3 = 0$
$x = 0$ scheidet als Lösung aus wegen $3y^2 \neq 5x$; es bleibt $x = 125/32 = 3{,}90625$
In der Grafik ist zu erkennen, dass es für dieses x insgesamt 3 y-Werte gibt !

Berechnung der 3 y-Werte durch einsetzen von $x = 125/32$ in die Ausgangsgleichung:
$2 \cdot (125/32)^2 + 5 \cdot 125/32 \cdot y - y^3 = 0 \Leftrightarrow 15625/512 + 625/32 \cdot y - y^3 = 0$
$\Leftrightarrow 15625 + 10000 \cdot y - 512y^3 = 0$
Lösungen für y: $y1 = -3{,}125$ $y2 = 1{,}5625 \cdot (1+\sqrt{(5)}) \approx 5{,}056$ $y3 = 1{,}5625 \cdot (1-\sqrt{(5)}) \approx -1{,}93$

Für y1 gilt: $y'' = 4 / (1875/64 - 625/32) = 4/(625/64) > 0$, was auf einen rel. TP schließen lässt .
Ergebnis: TP(3,90635 ; -3,125) ; die Bedingung $y = -0{,}8x$ ist außerdem erfüllt !

Für y2 gilt: $y'' \approx 0{,}07$, jedoch ist die Bedingung $y = -0{,}8x$ nicht erfüllt !
Für y3 gilt: $y'' \approx -8{,}3$, jedoch ist die Bedingung $y = -0{,}8x$ nicht erfüllt !

Beispiel 9): $x^3 - y^2 + 1 = 0$; $x, y \in \mathbb{R}$ (Wurzelschleife)



$F'(x,y) = 3x^2 - 2yy' = 0$; es folgt: $\mathbf{y' = 3x^2 / (2y)}$

$F''(x,y) = 6x - 2y'^2 - 2yy'' = 0$; es folgt: $\mathbf{y'' = (3x - y'^2) / y}$

Rel. Extremstellen:
Notw. Bed. $y' = 0$. Es folgt: $x = 0$, aber $y \neq 0$; Punkte P(0 ; 1) und Q(0 ; -1) kommen in Frage !
$y''(x=0) = (0 - 0) / y = 0$; keine Entscheidung möglich.
Wende VZW-Kriterium für y' an : Sei $h > 0$ gegeben:
$y'(h) = 3h^2 / (2y) > 0$, sowohl für $y = 1$ als auch für $y = -1$.
$y'(-h) = 3(-h)^2 / (2y) = 3h^2 / (2y) > 0$, sowohl für $y = 1$ als auch für $y = -1$.
Da y' an der Stelle $x = 0$ nicht das Vorzeichen wechselt, gibt es keine rel. Extrema !!